

А. А. ЭИХЕНВАЛЬД

# ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

★

ЧАСТЬ ТРЕТЬЯ

МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА



ГОСУДАРСТВЕННОЕ ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ  
ИЗДАТЕЛЬСТВО

МОСКВА • 1932 • ЛЕНИНГРАД

**ЧИТАТЕЛИ!** Сообщите отзыв об этой книге (Ваши замечания о ее недостатках и пожелания об изменениях в следующем издании) по адресу: Москва, Ильинка, пр. Владимирова, д. 4, Государственное технико-теоретическое издательство, в секцию организационно-массовой работы.

Редакционную работу по этой книге провел П. Н. Успенский. Издание оформил Э. А. Лившиц. Графические работы выполнили М. П. Шаморин и М. Козлов. Корректуру держал И. Загрядсков. Наблюдал за выпуском В. Куликов. Рукопись сдана в производство 16/III 1932 г., листы подписаны к печати 15/VIII 1932 г., книга вышла в свет в сентябре в количестве 20 000 экземпляров, на бумаге формата 62×94/16. Печатных знаков в листе 57000. Листов 13<sup>3</sup>/<sub>4</sub>. Заказ № 833. ГТТИ № 258. Уполномоченный Главлита № В-6443.

Первая типография Огиза РСФСР „Образцовая“, Москва, Валуев, 28.

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Эта третья часть теоретической физики представляет собой естественное продолжение части II: основные принципы механики применяются здесь к твердому телу, т. е. к системе материальных точек, расстояния между которыми неизменны. Общий характер изложения, выбор тем и примеров (я выбирал такие, которые сравнительно легко доступны опыту) вполне соответствуют тому, что было сказано в предисловии к частям I и II.

Содержание книги следующее:

Главы I и II содержат *кинематику* и *механику* неизменяемой системы, причем во избежание повторений сделаны частые ссылки на часть II.

Глава III рассматривает различные случаи равновесия твердого тела (*статики*). Сюда мною отнесены некоторые случаи равновесия балок, ферм, сыпучих тел, сводчатых перекрытий, цепей, канатов и т. п. Все это должно служить примерами применения общих уравнений равновесия и, кроме того, дает читателю некоторое понятие об основах технических расчетов; однако они отнюдь не представляют собой технических расчетов, которые носят совершенно иной характер.

Глава IV, где рассмотрены случаи вращения твердого тела вокруг неподвижной оси, содержит в себе также и случай *упругой* оси.

Главы V, VI, VII, VIII посвящены изучению явления вращения тела вокруг неподвижной точки. Оставаясь насколько возможно в рамках упрощенной теории, я старался осветить это явление с различных точек зрения. Непосредственный опыт и наблюдения (глава VIII) могут значительно облегчить его понимание. А между тем явление вращения твердого тела вокруг неподвижной точки приобрело, в особенности в последнее время, большое значение как в науке, так и в технике. Общий план теоретического изложения явления, т. е. глав V, VI, VII, читатель найдет в главе VIII в § 108. В главе VIII описаны главнейшие опыты с волчками и даны описание и расчет волчка-компаса и волчка-горизонта. Остальные технические применения волчка, как, например, волчок Шлика и др. для уменьшения качки корабля, однорельсовые железные дороги и т. п. я опустил, не желая обременять книги.

Глава IX трактует явление *качения*, а глава X — явление *соударения* твердых тел. В главу XI я выделил все расчеты по определению моментов инерции тел, ограничившись однородными телами простейших форм, наиболее часто встречающихся в практике. Это сделано для того, чтобы не прерывать изложение вычислениями побочного характера.

Для облегчения справок в конце книги имеется алфавитный указатель, а перед началом текста помещено довольно подробное оглавление.

Декабрь 1931.

А. Эйнвальд

## ОГЛАВЛЕНИЕ

### Глава I. Твердое тело 7—25

1. Определение твердого тела. 2. Шесть степеней свободы твердого тела. 3. Скорости точек твердого тела. 4. Угловая скорость вращения твердого тела. 5. Мгновенная ось вращения тела. 6. Винтовое движение. 7. Пример 1-й. 8. Пример 2-й. 9. Определение мгновенной оси вращения диска. 10. Движение Земли. 11. Центр массы (инерции) твердого тела. 12. Моменты инерции твердого тела. 13. Эллипсоид инерции. 14. Тензор моментов инерции. 15. Радиус инерции. 16. Импульс твердого тела. 17. Момент импульса твердого тела. 18. Кинетическая энергия твердого тела. 19. Соотношения между кинетической энергией и импульсами.

### Глава II. Механика твердого тела 26—47

20. Основные уравнения. 21. Уравнение энергии. 22. Обобщение. 23. О точках приложения сил. 24. Преобразование сил. 25. Многоугольник сил. 26. Пара сил. 27. Примеры пар сил. 28. Преобразование пар сил. 29. Преобразование сил и пар сил. 30. Параллельные силы. 31. Пример. 32. Поле тяготения. 33. Центральное поле. 34. Поле тяготения внутри однородного эллипсоида. 35. Наружное поле эллипсоида. 36. Эллипсоид вращения. 37. Сила, действующая на тело в центральном поле. 38. Момент сил, действующий на тело в центральном поле.

### Глава III. Равновесие твердого тела (статика) 48—73

39. Основные уравнения равновесия. 40. Рычажные весы. 41. Чувствительность весов. 42. Балка на двух опорах. 43. Линия моментов внутренних сил. 44. Сплошная нагрузка. 45. Равномерная нагрузка. 46. Фермы. 47. Статически неопределимые системы. 48. Устойчивость тяжелого твердого тела. 49. Степень устойчивости. 50. Влияние трения. 51. Равновесие сыпучего тела. 52. Равновесие гибкой нити. 53. Равновесие нити под действием собственного веса. 54. Упрощенный расчет. 55. Линия давления в своде. 56. Гибкая нить, намотанная на цилиндр.

### Глава IV. Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси 74—88

57. Общие замечания. 58. Атвудова машина. 59. Пример. 60. Физический маятник. 61. Свойство центра качания маятника. 62. Оборотный маятник. 63. Крутильный маятник. 64. Реакция оси вращения. 65. Пример. 66. Момент, ломающий ось. 67. Упругая ось (предварительный подсчет). 68. Упругая ось (более подробное исследование). 69. Вопрос об устойчивости движения.

### Глава V. Вращение твердого тела вокруг неподвижной точки (уравнения Эйлера) 89—105

70. Уравнения Эйлера. 71. Решения уравнений Эйлера при отсутствии внешних моментов. 72. Изменение направления оси при вращении по инерции. 73. Движение оси в теле. 74. Теорема Пуансо. 75. Полюды и гермолюды. 76. Движение волчка при отсутствии внешних моментов. 77. Движение волчка относительно неподвижной точки в трехмерном пространстве. 78. Волчок Штейнхейла. 79. Волчок Штейнхейла.

### Глава VI. Вращение вокруг неподвижной точки (координаты Эйлера) 106—126

80. Эйлеравы координаты. 81. Уравнения движения в эйлеровых координатах. 82. Прецессия свободного волчка. 83. Прецессия и нутация. 84. Удар по оси волчка. 85. Волчок стоячий и волчок висячий. 86. Регулярная прецессия волчка при действии момента силы тяжести. 87. Прецессия волчка с нутацией. 88. Приближенное решение. 89. Другой способ решения. 90. Циклоидальное движение оси волчка. 91. Пример. 92. Псевдо регулярная прецессия. 93. Волчок с наименьшим моментом импульса. 94. Принужденная прецессия и реактивный момент волчка.

### Глава VII. Вращение вокруг неподвижной точки (малые нутации) 127—147

95. Введение координаты  $x$ . 96. Другой способ получения уравнений. 97. Малые нутации быстро вращающегося волчка. 98. Связанные колебания. 99. Сильная связь между колебаниями. 100. Случай, когда основные частоты одинаковы. 101. Пример. 102. Волчок-маятник. 103. Стоячий волчок при малых отклонениях от вертикали. 104. Волчок-маятник при малых отклонениях. 105. Кривые, опиваемые осью вертикального волчка. 106. Частный случай. 107. Другой способ решения задачи о малых колебаниях вертикального волчка.

### Глава VIII. Применения теории волчка 148—179

108. Сопоставление результатов теории. 109. Волчки и жирокомпасы. 110. Опыты с волчком. 111. Закручивания и выбоины пути. 112. Вращающиеся механизмы на кораблях и аэропланах. 113. Катящийся обруч. 114. Управление велосипедом. 115. Прецессия вращающегося шара. 116. Жирокомпас Фуко. 117. Инclinаторий и деклинаторий Фуко. 118. Волчок-компас. 119. Примечания к расчету волчка-компаса. 120. Дальнейшие усовершенствования волчка-компаса. 121. Искусственный горизонт. 122. Прецессия и нутация Земли.

### Глава IX. Качение твердого тела 180—194

123. Предварительные замечания. 124. Чистое качение. 125. Примеры чистого качения. 126. Чистое качение диска по плоскости. 127. Чистое качение по наклонной плоскости. 128. Качение со скольжением. 129. Различные начальные условия. 130. Качение со скольжением вниз по наклонной плоскости. 131. Качение шара по горизонтальной плоскости.

### Глава X. Теория соударения тел 195—210

132. Предварительные замечания. 133. Нормальное падение шара на плоскость. 134. Отражение шара от плоскости. 135. Соударение вполне упругих шаров. 136. Частные случаи соударения вполне упругих шаров. 137. Внецентренный удар. 138. Общий случай внецентренного удара. 139. Мгновенная ось при внецентренном ударе. 140. Реакция оси при внецентренном ударе. 141. Баллистический маятник. 142. Горизонтальный удар кием по бильярдному шару. 143. Косой удар по шару.

### Глава XI. Вычисление моментов инерции 211—218

144. Предварительные замечания. 145. Параллелепипед. 146. Круговой цилиндр. 147. Полный цилиндр (обруч). 148. Эллипсоид. 149. Тело вращения. 150. Эллипсоид инерции.

Литература 218  
Алфавитный указатель 219

## ГЛАВА ПЕРВАЯ

### ТВЕРДОЕ ТЕЛО

1. Определение твердого тела. Твердым телом мы будем называть систему материальных точек, расстояния между которыми *неизменны*. Такое определение твердого тела (подобно целому ряду других определений теоретической физики) представляет собою *идеализацию* или *отвлечение*, которое делается для упрощения теории. В действительности же все твердые тела более или менее изменяемы: находясь под действием внешних сил, они изменяют и свой объем и свою форму. При подобных изменениях между соседними частями тела возникают внутренние силы реакции — так называемые молекулярные, или *упругие силы*. Явления, сюда относящиеся, мы будем изучать в V части „Теоретической физики“, в *теории упругости*, а здесь нас будут интересовать законы движения и покоя твердого тела, рассматриваемого как *нечто целое*; при этом мы будем предполагать, что те небольшие изменения в форме и объеме тела, которые будут иметь место в действительности, не окажут заметного влияния на *общее* движение тела. Это предположение не только упростит наши вычисления, но и позволит нам изучать отдельно такие явления в твердых телах, которые совсем не обусловлены свойствами упругих сил. В тех случаях, когда такое упрощение теории окажется недопустимым, — а, как увидим ниже, такие случаи возможны даже и при *небольших* изменениях в форме и объеме твердого тела, — тогда и законы механики твердого тела нам будут недостаточны, и нам придется прибегнуть к теории упругости.

2. Шесть степеней свободы твердого тела. Мы можем здесь не принимать во внимание молекулярной структуры твердого тела, а считать его сплошь заполненным материей. При наших расчетах мы будем представлять себе твердое тело составленным из элементарных объемов  $dV$ , заполненных материей плотности  $\rho$ . В таком случае все твердое тело будет представлять собой систему материальных точек, массой каждой.

$$dm = \rho \cdot dV$$

Плотность  $\rho$  для различных точек может быть различной, а форма элементарного объема  $dV$  может быть выбрана нами произвольно; она, обыкновенно, выбирается сообразно с системой координат (ср. ч. I, стр. 39, 40). Число таких материальных точек, из которых будет составлено рассматриваемое нами твердое тело, будет бесконечно. Тем не менее, положение твердого тела в пространстве может быть вполне определено *шестью* координатами; следовательно, твердое тело имеет в механике *шесть степеней свободы* (ср. ч. II, стр. 271, 179).

Мы можем убедиться в этом и следующим образом. Выберем в данном нам теле три каких-либо точки  $O$ ,  $A$ ,  $B$ , не лежащих на одной прямой

линии, нетрудно видеть, что закрыв эти *три точки*, мы тем самым лишаем тело возможности двигаться как бы то ни было, т. е. делаем неподвижными все *бесконечное число его материальных точек*. Правда, положение трех выбранных нами точек в пространстве определяется, вообще говоря,  $3 \cdot 3 = 9$  координатами, но в рассматриваемом нами случае координаты эти не независимы друг от друга, именно благодаря твердости тела, благодаря неизменности расстояний  $OA$ ,  $AB$ ,  $BO$ . Неизменность этих трех расстояний позволяет нам написать *три уравнения* вида:

$$(x_a - x_0)^2 + (y_a - y_0)^2 + (z_a - z_0)^2 = (OA)^2,$$

которые свяжут 3 входящих в них координаты точек  $O, A, B$  и оставят свободными только 6 координат. Отсюда следует, что твердое тело имеет 6 степеней свободы.

Закрепим одну из материальных точек твердого тела, например  $O$ ,

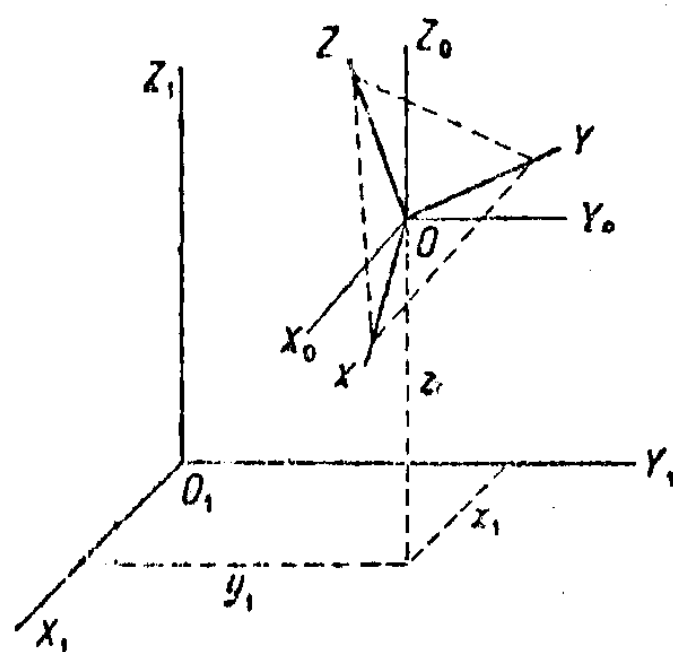


Рис. 1. Системы координат.

неподвижно в пространстве. После этого тело еще способно будет вращаться вокруг закрепленной точки, а каждая из других материальных точек тела  $P$  будет иметь возможность двигаться по шаровой поверхности радиуса  $OP$  с центром  $O$ . Но, закрепив одну точку твердого тела, мы тем самым отняли у него *три степени свободы* (зафиксировали значение трех координат  $x_1, y_1, z_1$  точки  $O$ ), и у твердого тела осталось только  $6 - 3 = 3$  — *три степени свободы*. Отсюда следует, что для определения положения твердого тела, закрепленного в одной точке, достаточно *трех координат*.

Что касается до самого выбора координат, определяющих положение твердого тела, то он может быть сделан как угодно, лишь бы выбранные шесть координат были *независимы* друг от друга и *вполне* определили положение тела. В большинстве случаев нам удобно будет точку  $O$  с координатами  $x_1, y_1, z_1$  взять в центре тяжести твердого тела, или в действительном закреплении тела; положение же тела *относительно* закрепленной точки мы можем определить следующим образом. Точку  $O$  мы примем за начало двух систем декартовых координат (прямолинейных и прямоугольных; рис. 1); одну из этих двух систем  $O_1X_1Y_1Z_1$  мы будем считать неподвижной в пространстве (эту систему мы можем принять параллельной той неподвижной системе координат, относительно которой мы дали координаты  $x_1, y_1, z_1$  начальной точки  $O$ ); другую систему координат  $OXYZ$  с тем же началом  $O$  мы представим себе *неизменно связанной* с материальными точками твердого тела и участвующей во всех движениях тела относительно точки  $O$  (на рис. 1 эти координатные оси соединены пунктирными прямыми линиями). Но положение всех точек твердого тела относительно системы координат  $OXYZ$  остается неизменным, а пока у для определения положения твердого тела в про-

странстве нам достаточно дать положение координат  $OXYZ$  относительно координат  $OX_0Y_0Z_0$ . Мы знаем, что относительное положение двух систем координат с общим началом определяется *девятью* углами (или девятью косинусами углов), которые образуют оси одной из систем с осями другой системы (ср. ч. I, стр. 160, 142, ч. II, стр. 194, 126); но так как обе наши системы прямоугольны, то между косинусами углов наклона осей имеются соотношения вида

$$\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 = 1; \quad \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1.$$

Таких соотношений всего *шесть*, и следовательно, *независимых* углов остается только *три* в согласии с тремя степенями свободы твердого тела, закрепленного одной точкой  $O$ . Самый выбор трех (независимых) основных углов остается и в этом случае произвольным, и мы ниже (в главе VI) познакомимся с координатами  $\varphi, \psi, \theta$ , предложенными Эйлером, которые оказались наиболее удобными для описания движения твердого тела, закрепленного одной своей точкой.

3. Скорости точек твердого тела. Рассмотрим опять три материальных точки  $O, A, B$  твердого тела и предположим, что за некоторый небольшой промежуток времени  $dt$  тело переместилось в пространстве, причем треугольник  $OAB$ , оставаясь неизменным, занял положение  $O_1A_1B_1$  (рис. 2). Мы можем расчленить это перемещение на следующие элементы. Во-

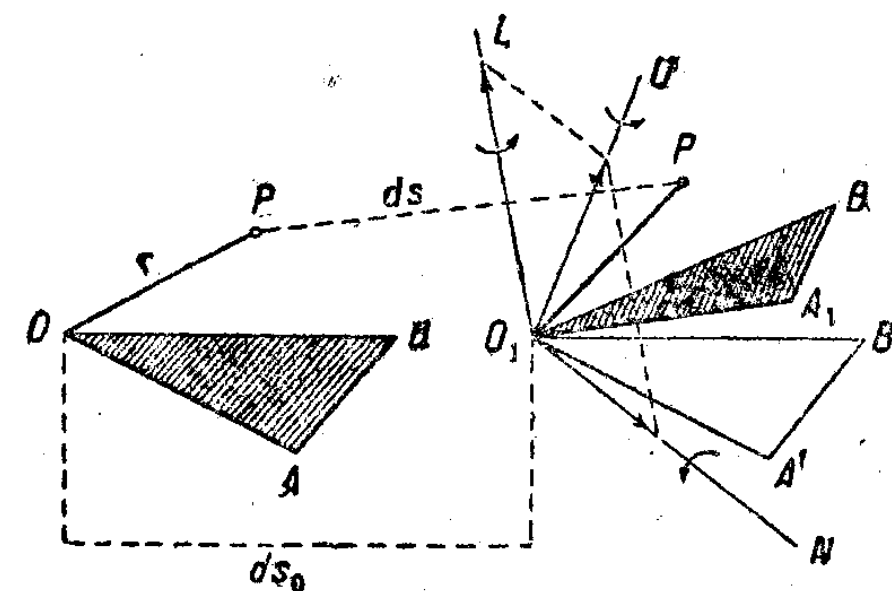


Рис. 2. Перемещение твердого тела.

первых, мы предположим, что весь треугольник  $OAB$ , оставаясь себе параллельным, переместился в положение  $O_1A_1B_1$ . Пусть  $ON$  представляет линию пересечения плоскостей  $O_1A_1B_1$  и  $O_1A'B'$ . Повернем плоскость треугольника  $O_1A'B'$  вокруг  $ON$  так, чтобы она совпала с плоскостью  $O_1A_1B_1$ ; затем повернем тот же треугольник  $O_1A'B'$  вокруг оси  $OL$ , перпендикулярной к плоскости  $O_1A_1B_1$ , до совпадения его с треугольником  $O_1A_1B_1$ . Так как оба совершенных нами поворота элементарны (углы поворота бесконечно малы), то с ними можно обращаться как с векторами (ч. I, стр. 28, 26), и заменить два поворота одним поворотом вокруг некоторой оси  $O_1U$  (рис. 2) на некоторый угол  $d\alpha$ . Таким образом перемещение треугольника из положения  $OAB$  в положение  $O_1A_1B_1$  мы можем расчленить на поступательное движение  $O_1O = ds_0$  и на поворот вокруг оси  $O_1U$  на угол  $d\alpha$ .

Одновременно с рассмотренным треугольником движется и все твердое тело, т. е. все его материальные точки. Отсюда следует, что и движение любой точки тела  $P$  мы тоже можем считать составленным из поступательного движения по направлению  $ds_0$  и из поворота вокруг оси  $O_1U$  на угол  $d\alpha$ . Если расстояние рассматриваемой точки тела  $P$  от

Подставляя сюда значение  $v_p$ , выраженное через скорость основной точки  $v_0$  и через расстояние искомым точек  $\Gamma$  от основной точки  $O$ , получаем

$$[uv_0] + [u[ur]] = 0,$$

или:

$$[uv] + u(r\alpha) - r(u\alpha) = 0.$$

Это векторное уравнение равносильно трем скалярным уравнениям, содержащим проекции вектора  $\Gamma$  на оси координат ( $x$ ,  $y$ ,  $z$ ) и определяющим положение некоторой прямой линии в теле. Если мы возьмем одну из точек этой линии за основную, то движение тела представится в виде поступательного движения вокруг оси вращения; такое движение называется *винтовым*.

Простейшими примерами винтового движения могут служить: движение булавки, винта или гайки, а также движение пропеллера аэроплана. Во всех этих примерах ось вращения постоянна; но в более общих случаях ось эта может менять свое положение и относительно внешнего неподвижного пространства (пропеллер) и относительно самого движущегося тела.

Ось винтового движения тела не нужно смешивать с мгновенной осью его. Для того чтобы сделать это более наглядным, предположим, что угловая скорость  $\omega$  в рассматриваемый момент времени параллельна оси координат  $OZ$  (выбор осей координат в нашей воле), тогда проекции выписанного уравнения на оси  $OX$  и  $OY$  будут

$$\begin{aligned} -\omega v_{0y} - \omega^2 x &= 0, \\ +\omega v_{0x} - \omega^2 y &= 0, \end{aligned}$$

между тем как проекция уравнения на ось  $OZ$  даст тождество  $0=0$ . Из этих уравнений определяются координаты

$$x = -\frac{v_{0y}}{\omega}; \quad y = +\frac{v_{0x}}{\omega};$$

третья координата  $z$  остается неопределенной. Это означает, что нашему условию удовлетворяет *целая линия*, параллельная оси  $OZ$ , и следовательно, параллельная угловой скорости вращения тела. Если мы подставим найденные значения  $x$  и  $y$  в общее уравнение для скорости любой точки движущегося тела, то получим

$$\begin{aligned} v_{px} &= v_{0x} - \omega y = v_{0x} - v_{0x} = 0; \\ v_{py} &= v_{0y} + \omega x = v_{0y} - v_{0y} = 0; \\ v_{pz} &= v_{0z} \end{aligned}$$

Эти уравнения служат только проверкой нашим вычислениям и показывают, что определенная нами линия (*ось винтового движения* тела) действительно обладает движением только параллельно угловой скорости вращения тела  $\omega$ . Что же касается *мгновенной оси вращения* тела, то для нас необходимо еще, чтобы и  $v_{pz}$  равнялась нулю. Сравнивая уравнения этого параграфа с уравнениями предыдущего параграфа, чи-

татель увидит различие между осью винтового движения и мгновенной осью движения тела.

Бывают, однако, случаи, когда и  $v_{pz} = 0$ , когда, например, тело движется перпендикулярно к своей оси вращения. Такое движение уже нельзя называть винтовым в обычном смысле этого слова; однако с математической точки зрения его можно трактовать как особый случай винтового движения при поступательной скорости винта, *равной нулю*. Ниже мы рассмотрим и такой случай.

7. Пример 1-й. Пусть диск (короткий цилиндр) вращается вокруг своей центральной оси с угловой скоростью  $\omega$  и в то же время имеет поступательную скорость  $v$  вдоль оси вращения. Мы имеем здесь простой пример винтового движения тела, причем все точки диска описывают в пространстве винтовые линии. Радиусы этих винтовых линий будут для различных материальных точек диска различны: они будут равны расстоянию рассматриваемой точки от оси диска. Что же касается *хода* винтовых траекторий, то он для всех точек будет одинаков. Действительно, каждая точка диска совершает полный оборот (угол, равный  $2\pi$ ) во время

$$t = \frac{2\pi}{\omega},$$

а за это время диск подвинется вперед на расстояние

$$h = vt = 2\pi \frac{v}{\omega}.$$

Эта величина называется *ходом* винта; а так как она оказывается независимой от положения точки на диске, то мы заключаем, что ход всех винтовых линий, описываемых различными материальными точками диска, один и тот же.

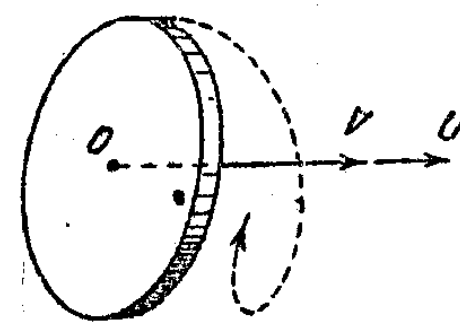


Рис. 4. Правовинтовое движение.

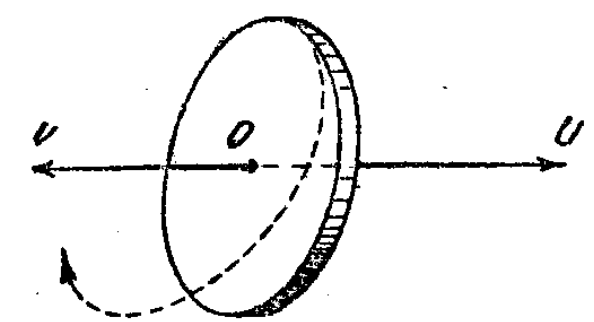


Рис. 5. Левовинтовое движение.

Если векторы  $\omega$  и  $v$  одинакового направления, то траектории точек диска будут представлять собою *правые* винты (рис. 4), если же векторы  $\omega$  и  $v$  направлены противоположно друг другу, то винты траекторий будут *левые* (рис. 5).

8. Пример 2-й. Теперь представим себе, что тот же диск, вращаясь вокруг своей оси симметрии с угловой скоростью  $\omega$ , перемещается по направлению, *перпендикулярному* к оси, с равномерной скоростью  $v$ . При таком движении различные точки диска, находящиеся на различных расстояниях от оси, будут описывать траектории различной формы. Возьмем ось координат  $OZ$  параллельно оси диска, которая будет, следова-

тельно, проектироваться на плоскость  $XU$  в виде точки  $O_1$  (рис. 6) и предположим, что скорость  $v$  направлена по оси  $+OX$ , а скорость  $u$  направлена по оси  $+OZ$ . Для скоростей движения различных точек  $P$  диска мы имеем общее уравнение

$$v_p = v + [ur],$$

которое в применении к данному случаю дает:

$$\begin{aligned} v_x &= v - ur_y \\ v_y &= +ur_x \end{aligned}$$

Проекция вектора  $r$  на оси координат мы выразим через угол поворота диска  $\varphi$  (рис. 6) и примем, что при  $t=0$  ось диска проходила через начало координат, а рассматриваемая точка  $P$  лежала на оси  $OY$  над осью. Такое предположение не ограничивает общности задачи, потому что выбор осей координат может быть сделан нами произвольно. Итак, положив  $\varphi = ut$ , мы можем переписать наши уравнения в следующем виде:

$$\begin{aligned} v_x &= v - ur \cos(ut); \\ v_y &= +ur \sin(ut); \end{aligned}$$

и проинтегрировать их по времени:

$$\begin{aligned} x &= vt + r \sin(ut); \\ y &= +r \cos(ut). \end{aligned}$$

Если бы поступательная скорость  $v$  равнялась нулю, то мы имели бы

$$\begin{aligned} x &= +r \sin(ut); \\ y &= +r \cos(ut), \end{aligned}$$

и это означало бы, что все точки диска описывают круги радиуса  $r$  (ср. ч. II, стр. 20, 12), равного расстоянию рассматриваемой точки от оси диска, как и следовало ожидать.

При дальнейшем исследовании уравнений полезно делать различие между точками диска, расположенными *вблизи* оси, и точками, отстоящими на более

далекое расстояние от оси, и притом следующим образом.

При малых значениях  $r$ , для которых

$$v > ur,$$

проекция  $v_x$  скорости движения точки остается во все время движения *положительной*; между тем как параллельно оси  $OY$  точка совершает

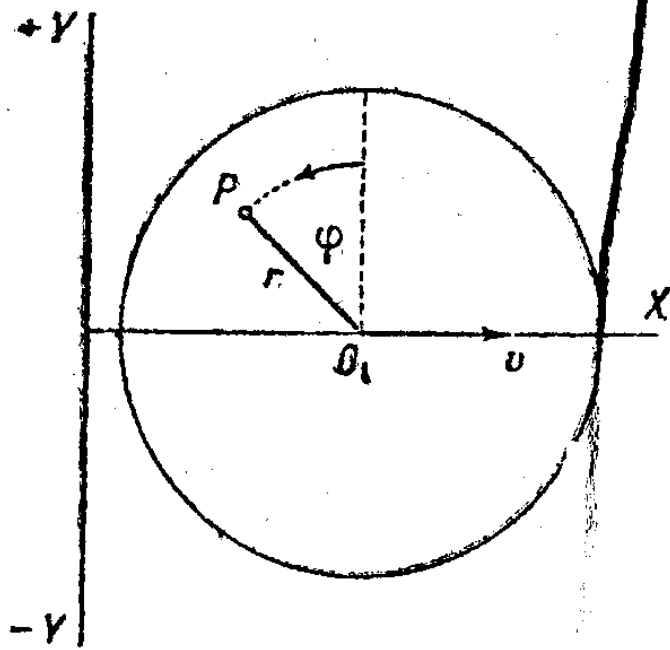


Рис. 6. Движение перпендикулярно к оси вращения.

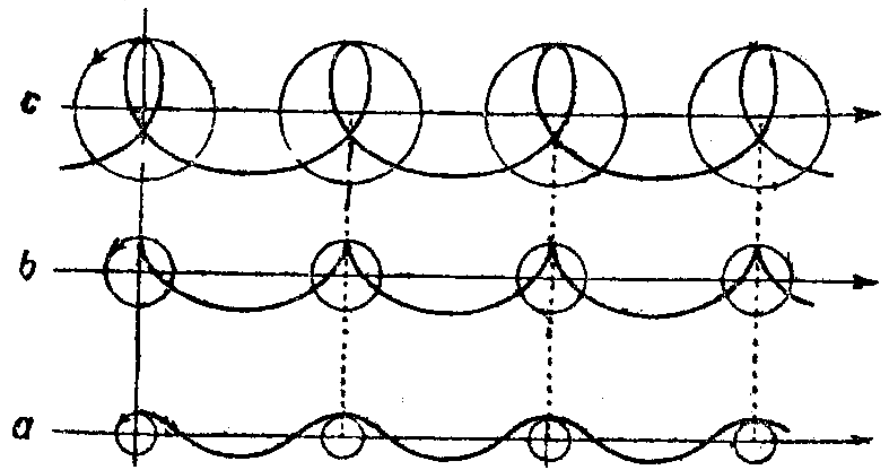


Рис. 7. Кривые, описываемые различными точками диска.

гармонические колебания. Результирующая траектория подобных точек диска будет иметь форму, изображенную на рис. 7, а. Эти волнообразные кривые отчасти напоминают собой синусоиды, но они отличаются от синусоид тем, что их верхняя и нижняя половины не одинаковы. Для синусоид (или косинусоид) мы имели бы несколько иные уравнения, а именно:

$$x = vt, \quad y = +r \cos(ut).$$

Далее, для точек, которые отстоят от оси диска на более значительное расстояние, для которого

$$v < ur,$$

величина  $v_x$ , как это видно из вышенаписанного уравнения, может оказаться в некоторые моменты времени *отрицательной*. Это означает, что такие точки будут некоторое время двигаться назад — в сторону, противоположную движению оси диска, и следовательно, траектории их будут образовывать петли (рис. 7, c). Наконец, те точки диска, расстояние  $r_0$  которых от оси диска удовлетворяет условию

$$v = ur_0,$$

будут иметь траектории, в которых вместо петель образовался острый излом (точка возврата), как это изображено на рис. 7, b.

Нетрудно доказать, что эти последние кривые представляют собой циклоиды. Действительно, если в наших уравнениях мы положим  $r = r_0$  и

$$v = ur_0; \quad ut = \varphi; \quad y = y' - r_0$$

(последняя замена означает, что мы подняли ось  $OX$  на высоту  $r_0$ ), то мы получим:

$$\begin{aligned} x &= r_0(\varphi - \sin \varphi); \\ y' &= r_0(1 - \cos \varphi). \end{aligned}$$

Эти уравнения тождественны с уравнениями циклоиды, которые мы вывели раньше в части II (стр. 170, 111, рис. 78).

9. Определение мгновенной оси вращения диска. Определим положение мгновенной оси вращения диска, движение которого мы рассмотрели в предыдущем параграфе. Очевидно, что эта ось будет параллельна оси координат  $OZ$ , и нам нужно только определить точку  $P$  пересечения мгновенной оси с плоскостью  $XU$ . Для этого мы имеем уравнения (стр. 11, 5 нужно положить  $v = v_{0x} = v$ ,  $u_y = u_x = 0$ ):

$$\begin{aligned} v_{px} &= v - ur_y = 0 \\ v_{py} &= +ur_x = 0. \end{aligned}$$

Следовательно, искомая точка должна удовлетворять условиям:

$$r_x = 0, \quad r_y = \frac{v}{u} = r_0.$$

Второе из этих уравнений показывает нам, что искомая точка лежит на одной вертикали с центром диска (рис. 8), тогда как первое

уравнение дает нам высоту этой точки над центром диска  $r_0$ . Этот результат остается в силе для *любого* момента времени. Но если мгновенная ось вращения диска во все время движения должна оставаться на одной вертикали с осью диска, то это означает, что эта ось сама перемещается в пространстве и притом с той же скоростью  $v$ , что и ось диска. Далее, отсюда следует, что и относительно материальных точек диска положение мгновенной оси вращения не постоянно: если эта ось все время остается на высоте  $r_0$ , а диск при этом вращается, то это означает, что мгновенная ось описывает в теле диска круги радиуса  $r_0$  с центром на оси диска.

Оба найденные нами движения мгновенной оси как относительно неподвижного пространства, так и относительно точек движущегося диска, мы можем реализовать следующим образом. Представим себе, что к одной из плоскостей нашего диска  $A$  приклеен второй диск  $B$  радиуса  $r_0$  (рис. 8) концентричный с первым. На высоте  $r_0$  от оси  $OX$  мы помещаем полосу  $O_1X_1$  параллельно оси  $OX$ . Если мы будем катить диск  $B$  по *нижней* стороне полосы  $O_1X_1$  (не давая диску скользить по полосе), то оба диска будут поворачиваться вокруг точки  $P$  касания диска  $B$  с полосой  $O_1X_1$ ; эта точка касания  $P$  и будет служить мгновенной осью вращения обоих дисков. При таком качении мгновенная ось вращения рассматриваемого твердого тела будет перемещаться в пространстве

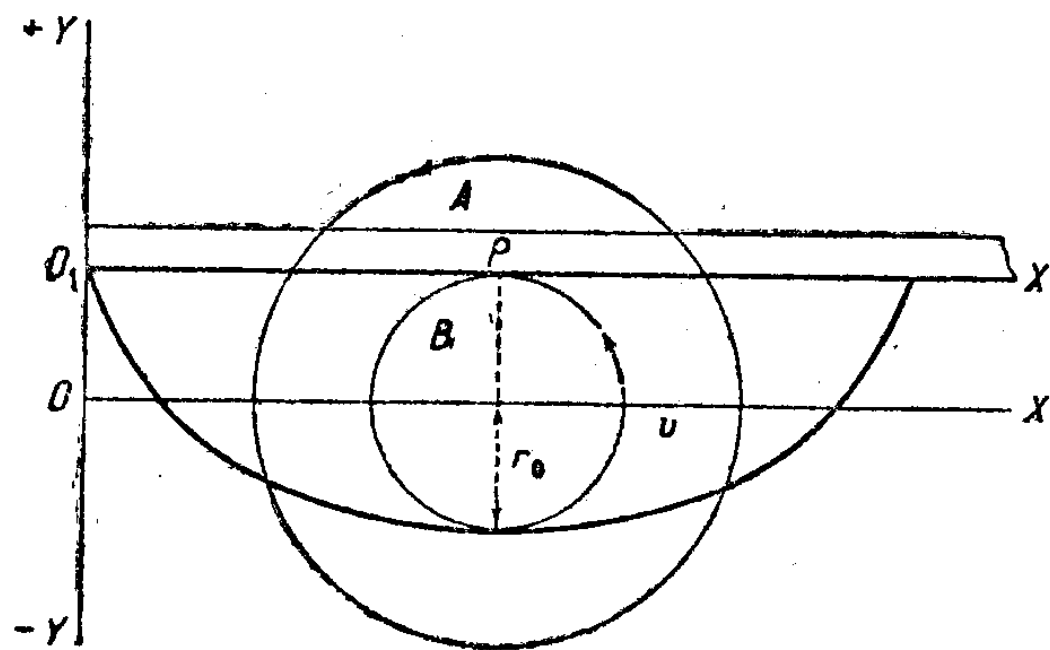


Рис. 8. Мгновенная ось вращения диска.

по линии  $O_1X_1$  со скоростью  $V$ , т. е. с той же скоростью, что и центр диска.

Заметим, что радиус диска  $r_0$  равен радиусу того круга, для которого (стр. 15, 8)

$$v = \omega r_0,$$

а в предыдущем параграфе мы доказали, что любая точка окружности этого круга описывает в пространстве циклоиду. Это вполне сходится с тем что мы имели в части II на стр. 170, 111, где циклоида чертилась именно таким образом — качением круга по прямой линии (ч. II, стр. 170, 111, рис. 78).

Мы ограничимся приведенными двумя примерами движения твердого тела, которые нам пригодятся впоследствии; целый ряд других примеров читатель может найти в технических учебниках по кинематике.

10. Движение Земли. Мы знаем, что Земля делает полный оборот вокруг своей полярной оси в течение суток, и если рассматривать это вращение относительно неподвижных (т. е. очень далеко отстоящих от

Земли) звезд, то эти так называемые *звездные сутки* (см. ч. II, стр. 11, 4) равняются

$$T = 86\,164 \text{ сек.}$$

Отсюда определяется угловая скорость вращения Земли вокруг ее полярной оси:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 73 \cdot 10^{-6} \text{ сек.}$$

Кроме вращения вокруг полярной оси Земля имеет еще поступательное движение по своей траектории вокруг Солнца, скорость которого равна около

$$v = 30 \frac{\text{км}}{\text{сек.}}$$

Наконец, вся наша планетная система движется вместе с Солнцем по направлению к созвездию Лиры со скоростью около 20 километров в секунду и т. д. Но если мы отвлекемся от этого последнего движения и ограничимся исследованием движения точек земной поверхности относительно планетной системы и применим для этого нашу основную формулу

$$v_p = v + [\omega, r],$$

то получим следующее.

Полюсы Земли (и вообще все точки земной оси) описывают вокруг Солнца одинаковые эллипсы. Все другие точки поверхности Земли описывают винтообразные линии. Хотя ось Земли наклонена к плоскости эклиптики под *постоянным* углом в  $66,5^\circ$ , но угол, образуемый этой осью с траекторией Земли, меняется в течение года: весной угловая скорость вращения Земли образует тупой угол с направлением ее движения по эклиптике, летом этот угол делается прямым, осенью он острый, зимой он снова делается прямым и т. д. (см. ч. II, рис. 20). Вследствие наклона полярной оси траектории точек земной поверхности представляют собой не обычные, а перекосившиеся винтовые линии; кроме того, и ход этих винтовых линий меняется в течение года: весной и осенью мы имеем наибольший ход, тогда как летом и зимой, когда Земля движется перпендикулярно к своей оси вращения, ход винтовых линий равен нулю. Наконец, нетрудно сообразить, что весной точки поверхности Земли описывают *левые* винты, тогда как осенью эти винты превращаются в *правые*. Мы предлагаем читателю самому разобрать этот вопрос подробнее, а для большей наглядности он может воспользоваться или этого вращающимся глобусом.

Какова скорость движения города Москвы вокруг Солнца в различные времена года?

11. Центр массы (инерции) твердого тела. Твердое тело представляет собой частный случай системы материальных точек, а потому дальнейшие рассуждения наши будут вполне аналогичны тому, что мы уже имели в ч. II, в главе XI.



Масса твердого тела равна сумме масс всех его точек; для сплошного тела эта сумма напишется в виде интеграла:

$$M = \int \rho \cdot d\omega.$$

Величины  $\rho$  и  $M$  мы будем считать неизменными, независимыми от скорости движения, что соответствует действительности с громадной степенью точности.

Центром масс (или инерции) твердого тела (или центром тяжести его) называется такая точка, которая при массе, равной  $M$ , образует вокруг любой точки пространства момент  $M\mathbf{r}_c$ , равный сумме моментов масс всех точек данного тела (ч. II, стр. 271, 181). Обозначая координаты центра масс через  $x_c, y_c, z_c$ , мы можем написать:

$$\mathbf{r}_c = \frac{1}{M} \int \mathbf{r} \cdot dm, \quad \begin{aligned} x_c &= \frac{1}{M} \int \rho \cdot x \cdot d\omega, \\ y_c &= \frac{1}{M} \int \rho \cdot y \cdot d\omega, \\ z_c &= \frac{1}{M} \int \rho \cdot z \cdot d\omega. \end{aligned}$$

Если начало координат мы выбрали в центре масс, то координаты  $x_c, y_c, z_c$  будут равны нулю. Отсюда мы видим, что момент всех масс точек, составляющих тело, вокруг центра масс равен нулю.

12. Моменты инерции твердого тела. Проведем через какую-либо точку данного нам твердого тела декартову систему координат и предположим ее неизменно связанной с материальными точками самого тела. В таком случае координаты каждой точки тела  $x, y, z$  и во время движения тела останутся неизменными. Моменты инерции тела вокруг этих осей координат будут выражаться формулами (ч. II, стр. 273, 182):

$$\text{вокруг оси } X: \dots A = \int (r^2 - x^2) \rho \cdot d\omega,$$

$$\text{вокруг оси } Y: \dots B = \int (r^2 - y^2) \rho \cdot d\omega,$$

$$\text{вокруг оси } Z: \dots C = \int (r^2 - z^2) \rho \cdot d\omega,$$

а произведения инерции вокруг тех же осей будут:

$$D = \int yz \cdot \rho \cdot d\omega; \quad E = \int zx \cdot \rho \cdot d\omega; \quad F = \int xy \cdot \rho \cdot d\omega.$$

Момент инерции тела вокруг какой-либо оси  $OU$ , проходящей через начало координат и составляющей с осями углы, косинусы которых равны соответственно  $\alpha, \beta, \gamma$ , выражается через моменты инерции и произведения инерции вокруг осей координат формулой

$$I = A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 - 2D\beta\gamma - 2E\gamma\alpha - 2F\alpha\beta.$$

Для твердого тела все эти величины  $A, B, C, D, E, F, I$  остаются и во время движения неизменными. Однако величины эти при перемене начала координат и при перемене направления осей координат будут, конечно, меняться. В каждой точке тела можно выбрать направление осей координат так, что все произведения инерции будут равны нулю; эти направления называются *главными осями инерции* тела в рассматриваемой точке. При таком выборе осей координат вышенаписанная формула для момента инерции вокруг оси  $OU$  упрощается:

$$I = A_0\alpha^2 + B_0\beta^2 + C_0\gamma^2,$$

а величины  $A_0, B_0, C_0$  называются *главными моментами инерции* тела для рассматриваемой точки.

13. Эллипсоид инерции. Для более наглядного представления о моментах инерции вокруг различных осей, проходящих через рассматриваемую точку тела, Пуансо (Poinsot) предложил следующий графический метод. Из рассматриваемой точки проводят лучи во все стороны и на каждом луче откладывают длину

$$r = \frac{1}{\sqrt{I}},$$

где  $I$  означает момент инерции тела вокруг этого луча. Совокупность полученных таким образом точек образует поверхность эллипсоида, уравнение которого мы получим, если в формулу для момента инерции подставим проекции на оси координат радиуса вектора  $r$ ; а именно:

$$x = ar; \quad y = \beta r; \quad z = \gamma r$$

дают при подстановке

$$A_0x^2 + B_0y^2 + C_0z^2 = 1.$$

Длины главных полуосей этого эллипсоида будут

$$a_0 = \frac{1}{\sqrt{A_0}}; \quad b_0 = \frac{1}{\sqrt{B_0}}; \quad c_0 = \frac{1}{\sqrt{C_0}}.$$

Форма и ориентировка этого эллипсоида характеризуют моменты инерции тела вокруг осей, проходящих через рассматриваемую точку; для различных точек тела и форма и ориентировка эллипсоидов инерции может быть весьма различна.

14. Тензор моментов инерции. Из вышесказанного следует, что моменты инерции и произведения инерции тела вокруг осей, проходящих через какую-либо точку тела, представляют собой симметричный тензор (ч. I, стр. 155, 137; стр. 158, 141) такого вида:

$$\Gamma_I = \begin{bmatrix} +A & -F & -E \\ -F & +B & -D \\ -E & -D & +C \end{bmatrix}.$$

Если же оси координат направлены по главным осям инерции, то тензор упрощается, сохраняя только свои диагональные члены:

$$T_I = \begin{bmatrix} A_0 & 0 & 0 \\ 0 & B_0 & 0 \\ 0 & 0 & C_0 \end{bmatrix}.$$

В соответствии с этим эллипсоид инерции Пуансо представляет собой один из тех тензорных эллипсоидов, которые мы рассматривали в общей теории тензоров (ч. I, стр. 153, 136).

Возьмем какой-нибудь единичный вектор  $u_1$ , проведенный от рассматриваемой точки тела, и пусть направление этого вектора определяется косинусами  $\alpha, \beta, \gamma$  углов наклона его к осям координат. Если мы применим к этому вектору операцию, обозначаемую символом  $T_I$ , то получим другой вектор

$$G = T_I u_1,$$

кого составляющие по осям координат будут

$$\begin{aligned} g_x &= A\alpha - F\beta - E\gamma \\ g_y &= -F\alpha + B\beta - D\gamma \\ g_z &= -E\alpha - D\beta + C\gamma, \end{aligned}$$

— в этом именно и заключается значение символа  $T_I$ . Теперь составим скалярное произведение вектора  $G$  на вектор  $u_1$ :

$$(T_I u_1 \cdot u_1) = g_x \alpha + g_y \beta + g_z \gamma.$$

Нетрудно видеть, что мы получим таким образом выражение для момента инерции тела вокруг оси  $OU$ , проведенной через рассматриваемую точку:

$$I = A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 - 2D\beta\gamma - 2E\gamma\alpha - 2F\alpha\beta.$$

Таким образом, применяя символы векторного (и тензорного) исчисления, мы можем написать:

$$I = (T_I u_1 \cdot u_1).$$

15. Радиус инерции. Очень часто бывает удобно относить величину момента инерции к единице массы, введя величину  $k$ , определяемую уравнением

$$k^2 = \frac{I}{M}; \quad k = \sqrt{\frac{I}{M}}.$$

Эта величина называется *радиусом инерции* тела для данной точки тела и для определенного направления (ср. ч. II, стр. 277, 185.). Для различных точек тела и для различных направлений радиусы инерции могут быть весьма различны. Соотношение между радиусом инерции и радиусом-вектором эллипсоида Пуансо таково:

$$r = \frac{1}{\sqrt{I}} = \frac{1}{k\sqrt{M}}.$$

В конце книги мы приводим вычисления, служащие для определения положения центра тяжести тел различной формы и моментов инерции, вокруг главных осей, проходящих через *центр тяжести*. Если момент инерции  $I_c$  вокруг какой-либо оси, проходящей через центр тяжести, известен, то момент инерции вокруг параллельной ей оси, отстоящей от нее на расстоянии  $a$  (и следовательно, не проходящей через центр тяжести), определяется формулой (ч. II, стр. 274, 183):

$$I = I_c + Ma^2,$$

или, вводя сюда радиус инерции тела относительно центра тяжести  $k_c$ ,

$$I_c = k_c^2 M,$$

получаем

$$I = M(k_c^2 + a^2).$$

Таким образом, зная момент инерции (или радиусы инерции) тела по отношению к осям, проходящим через центр тяжести, мы легко можем вычислить и момент инерции вокруг любой другой оси, проведенной по любому направлению через любую другую точку тела.

16. Импульс твердого тела. Импульс твердого тела равен геометрической сумме импульсов всех его точек. Для сплошного тела суммы переходят в интегралы, и мы можем для импульса написать формулу:

$$P = \int v \cdot dm = \int \dot{r} \cdot dm,$$

где  $r$  означает расстояние рассматриваемой точки от начала координат, а точка над буквой означает производную по времени. Но, с другой стороны, положение центра тяжести тела определяется уравнением (стр. 18, 11):

$$r_c = \frac{1}{M} \int r \cdot dm,$$

из которого следует, что

$$\int \dot{r} \cdot dm = M \dot{r}_c.$$

Приняв это во внимание, мы можем импульс твердого тела представить в таком виде:

$$P = M \dot{r}_c = M v_c,$$

где  $v_c$  есть скорость движения центра тяжести. Таким образом центр тяжести твердого тела играет роль материальной точки, в которой сосредоточена вся масса тела. Это правило нам будет встречаться неоднократно.

17. Момент импульса твердого тела. Момент импульса твердого тела вокруг какой-либо точки равен геометрической сумме моментов импульсов всех его точек (см. ч. II, стр. 278, 187). Нас будет интересовать здесь, главным образом, момент импульса вокруг центра тяжести тела; центр тяжести тела может при этом находиться в движении. Выражение для момента импульса в этом случае упрощается (ч. II, 278, 187):

$$K = \int [rv] \cdot dm,$$

где  $r$  означает расстояние каждой точки тела до центра тяжести, а  $v$  — скорость движения этой точки; при этом под  $v$  мы можем подразумевать абсолютную скорость движения (относительно неподвижных координат) или относительную скорость точки по отношению к движущемуся центру тяжести. Для того чтобы это было яснее, пусть  $v$  означает абсолютную скорость движения каждой точки тела. Тогда для твердого тела вектор  $v$  можно разложить на два вектора: на вектор скорости центра тяжести  $v_c$  и на вектор относительной скорости точки тела; но благодаря твердости тела относительная скорость будет не что иное, как вращательная скорость точки вокруг центра тяжести, и мы можем написать:

$$v = v_c + [ur].$$

Первый член этой формулы для всех точек тела одинаков и может быть вынесен за знак интеграла. Мы получаем

$$\int [rv_c] \cdot dm = \left[ \int r dm v_c \right] = 0,$$

потому что момент масс вокруг центра тяжести (первый множитель) равен нулю. Остается

$$K = \int [r [ur]] = \int (u \cdot r^2 - r(ru)) \cdot dm.$$

Двойное векторное произведение мы разложили (по правилу ч. I, стр. 32, 31) на два вектора, из которых один направлен параллельно угловой скорости тела  $u$ , а другой — по радиусу-вектору  $r$ , проведенному из центра тяжести в рассматриваемую точку тела. Возьмем начало декартовых координат в центре тяжести тела, а оси координат предположим неизменно связанными с материальными точками тела. Тогда проекции радиуса вектора  $r$  на оси координат  $x, y, z$  будет представлять координаты рассматриваемой точки тела: при этом

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2; \\ (ru) = xu_x + yu_y + zu_z.$$

Приняв это во внимание, составим выражения для проекций вектора  $K$  на эти оси координат:

$$K_x = u_x \int (r^2 - x^2) \cdot dm - u_y \int xy \cdot dm - u_z \int zx \cdot dm; \\ K_y = -u_x \int xy \cdot dm + u_y \int (r^2 - y^2) \cdot dm - u_z \int yz \cdot dm; \\ K_z = -u_x \int zx \cdot dm - u_y \int zy \cdot dm + u_z \int (r^2 - z^2) \cdot dm;$$

Нетрудно видеть, что коэффициентами при  $u_x, u_y, u_z$  служат моменты инерции и произведения инерции тела относительно начала, т. е. относи-

тельно центра тяжести тела (ср. стр. 18, 12), а потому мы можем написать

$$K_x = +Au_x - Fu_y - Eu_z; \\ K_y = -Fu_x + Bu_y - Du_z; \\ K_z = -Eu_x - Du_y + Cu_z.$$

Мы уже указали выше, что моменты инерции и произведения инерции для какой-либо точки твердого тела составляют симметричный тензор (стр. 19, 14), а теперь мы видим, что момент импульса твердого тела представляется в виде произведения этого тензора на вектор  $u$  угловой скорости вращения тела:

$$K = T_I \cdot u.$$

В частном случае, когда вращение происходит вокруг одной из главных осей инерции тела (в рассматриваемой точке), тензорное произведение превращается в простое произведение момента инерции на угловую скорость вращения

$$K_A = A \cdot u.$$

Следовательно, вообще говоря, вектор момента импульса  $K$  не совпадает по своему направлению с вектором угловой скорости  $u$  и только при вращении тела вокруг одной из главных осей инерции оба вектора  $K$  и  $u$  имеют одинаковое направление (ср. ч. II, стр. 279, 188).

18. Кинетическая энергия твердого тела. Кинетическая энергия твердого тела равна суммарной кинетической энергии всех его материальных точек. Мы уже доказали ранее теорему Кёнига (ч. II, стр. 280, 191), по которой кинетическую энергию системы материальных точек можно считать составленной из двух частей: из кинетической энергии движения центра тяжести, в котором нужно принять сосредоточенной всю массу тела

$$T_c = \frac{1}{2} M v_c^2,$$

и из кинетической энергии движения всех точек тела относительно центра тяжести

$$T_r = \frac{1}{2} \int v^2 \cdot dm.$$

В этих уравнениях  $v_c$  означает скорость движения центра тяжести, а  $v$  — относительную скорость движения одной из точек тела с массой  $dm$ . Для твердого тела относительную скорость  $v$  можно выразить через расстояние  $r$  точки от центра тяжести и через угловую скорость вращения твердого тела  $u$ :

$$v = [ur].$$

При подстановке этой формулы в подынтегральное выражение  $T_r$  выгодно рассматривать квадрат скорости точки  $v^2$  как скалярное произведе-

ние ( $v$ ) и подставить значение  $\sigma$  только в один из этих множителей. Тогда получаем:

$$T_r = \frac{1}{2} \int (v [ur]) \cdot dm.$$

Переставляем множители по общим правилам векторного исчисления ч. I, стр. 31, 30)

$$T_r = \frac{1}{2} \int (u [rv]) \cdot dm.$$

Общую для всех точек тела угловую скорость вращения  $u$  мы можем вынести за знак интеграла, после чего под интегралом останутся моменты импульсов точек тела вокруг центра тяжести. Итак,

$$2T_r = u \int [rv] \cdot dm = (uK).$$

Подставляем сюда значение момента импульса вокруг центра тяжести, как мы его получили в параграфе 17, стр. 21.

$$2T_r = Au_x^2 + Bu_y^2 + Cu_z^2 - 2Du_yu_z - 2Eu_zu_x - 2Fu_xu_y.$$

Если оси координат направлены по *главным* осям инерции, то имеем:

$$2T_r = Au_x^2 + Bu_y^2 + Cu_z^2.$$

Как в последнем, так и в предпоследнем выражении кинетической энергии вращающегося твердого тела, мы можем величину угловой скорости вращения тела вынести за скобки и написать (ср. ч. II, стр. 281, 192):

$$2T_r = Iu^2.$$

Это выражение мы могли бы получить и непосредственно, подставив в выражение кинетической энергии вращения твердого тела

$$2T_r = (uK)$$

значении (стр. 21, 17)

$$K = T_r \cdot u$$

и вынеся  $u^2$  за скобки:

$$2T_r = (uT_r) = (u_1T_{r1}) u^2 = Iu^2.$$

19. Соотношения между кинетической энергией и импульсами. Выражения для импульса и для момента импульса твердого тела могут быть выведены и из общего выражения для кинетической энергии тела, на основании общего правила (ч. II, стр. 228, 149; стр. 241, 157) по которому всякий импульс, в обобщенном смысле этого термина, равен частной производной по соответствующей скорости. Напишем выражение кинетической энергии твердого тела в предположении, что оси координат направлены по *главным* осям инерции тела:

$$2T = M(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) + Au_x^2 + Bu_y^2 + Cu_z^2.$$

Для определения *импульса* тела нужно взять производные по *скоростям*  $\sigma$ :

$$P_x = \frac{\partial T}{\partial \sigma_x} = M\sigma_x; \quad P_y = \frac{\partial T}{\partial \sigma_y} = M\sigma_y; \quad P_z = \frac{\partial T}{\partial \sigma_z} = M\sigma_z;$$

Для определения *моментов импульсов* тела нужно взять производные по *угловым* скоростям (ч. II, стр. 241, 157)

$$K_x = \frac{\partial T}{\partial u_x} = Au_x; \quad K_y = \frac{\partial T}{\partial u_y} = Bu_y; \quad K_z = \frac{\partial T}{\partial u_z} = Cu_z.$$

Все эти формулы находятся в полном согласии с тем, что мы получили раньше путем преобразования интегралов, распространенных на все точки тела.

Заметим в заключение, что деля кинетическую энергию вращения  $T_r$  на  $u^2$ , мы получаем момент инерции тела  $I$  вокруг оси вращения  $OU$ , а деля еще на  $I$ , получаем уравнение эллипсоида Пуансо (см. стр. 19, 13). Мы можем, следовательно, и кинетическую энергию вращения твердого тела вокруг различных осей, проведенных через центр тяжести, тоже представлять в виде эллипсоида.

Все эти эллипсоиды: эллипсоид энергии, эллипсоид Пуансо (моментов инерции) и тензорный эллипсоид тензора  $T_I$  (см. ч. I, стр. 153, 136, эллипсоид деформации) по существу одинаковы, только представлены в различных масштабах. Точно так же и соотношения между моментами импульса и угловыми скоростями твердого тела вполне соответствуют соотношениям между нормальными и радиусами-векторами тензорных эллипсоидов, о которых мы говорили в ч. I на стр. 155, 136; рис. 113.

МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

20. Основные уравнения. Твердое тело является одним из частных случаев системы материальных точек; поэтому для твердого тела остаются в силе общие уравнения механики системы (ч. II, стр. 290, 290).

Во-первых, уравнение импульса:

$$\dot{P} = M\dot{v}_c = \sum F,$$

где  $M$  означает массу всего тела, а  $\dot{v}_c$  — ускорение центра тяжести тела. Справа написана геометрическая сумма всех сил, действующих на тело. Таким образом центр инерции твердого тела движется так, как будто в нем сосредоточена вся масса тела и к нему приложены все силы, действующие на тело.

Заметим, что равнодействующая всех внутренних сил тела всегда равна нулю, а потому внутренние силы в правую часть этого уравнения совсем не входят; но в число внешних сил могут входить не только заданные силы, но также и внешние реакции, обусловленные теми или иными связями.

Кроме уравнения импульса мы имеем еще уравнение моментов. Если мы предположим, что все моменты отнесены к неподвижной точке, или к центру инерции тела, то уравнение моментов принимает простой вид (ч. II, стр. 283, 195):

$$\dot{K} = \sum M.$$

И в это уравнение моменты внутренних сил не входят, потому что они попарно уничтожаются, но могут входить моменты внешних реакций.

Оба уравнения — импульсов и моментов дают шесть скалярных уравнений: три — для поступательной скорости движения центра инерции и три — для вращательной скорости твердого тела. Это вполне соответствует шести степеням свободы твердого тела.

21. Уравнение энергии. Мы видели, что кинетическая энергия твердого тела состоит из двух частей: из кинетической энергии поступательного движения центра инерции тела:

$$T_c = \frac{1}{2} M v_c^2 = \frac{1}{2} (P v_c)$$

и из кинетической энергии вращения вокруг центра инерции (стр. 26, 18):

$$T_r = \frac{1}{2} J u^2 = \frac{1}{2} (K u).$$

Изменение кинетической энергии со временем мы можем представить в таком виде:

$$\frac{dT}{dt} = M\dot{v}_c \cdot v_c + J\dot{u} \cdot u = (\dot{P} v_c) + (K \dot{u}).$$

С другой стороны, если к какой-либо точке тела приложена сила  $F$ , и точка эта движется со скоростью  $v$ , то эффект (работа в единицу времени) этой силы будет равен

$$(F v).$$

Но скорость каждой точки твердого тела можно разложить на две составляющие: на скорость центра инерции  $v_c$  и на вращательную скорость  $u$  вокруг центра инерции:

$$v = v_c + [u \cdot r],$$

где  $r$  означает расстояние рассматриваемой точки  $P$  от центра инерции  $O$ . В таком случае и эффект силы можно представить в форме:

$$(F v) = (F v_c) + (F [ur]) = (F v_c) + (u [rF]).$$

Во втором члене мы произвели перестановку множителей по правилу векторного исчисления, причем величина в прямых скобках оказалась равной моменту силы вокруг центра инерции. Суммируя полученное выражение эффекта по всем точкам тела, получаем полный эффект всех сил, приложенных к твердому телу:

$$\sum F \cdot v = v_c \sum F + u \sum M.$$

На основании принципа сохранения энергии эта величина должна равняться изменению кинетической энергии тела в единицу времени; следовательно:

$$(v_c \dot{P}) + (u \cdot \dot{K}) = v_c \sum F + u \sum M.$$

Если поступательное движение твердого тела независимо от его вращения, то это уравнение, распадается на два независимых уравнения

$$\dot{P} = M v_c = \sum \dot{F}; \quad \dot{K} = \sum M.$$

Мы получили, таким образом, уравнения предыдущего параграфа.

22. Обобщение. Полезно заметить себе, что рассуждения предыдущего параграфа можно представить в несколько обобщенной форме.

Обозначим через  $\dot{q}$  обобщенную скорость точки твердого тела, а через  $Q$  — обобщенную силу, приложенную к этой точке (ч. II, стр. 231, 151) (это означает, что если  $\dot{q}$  представляет собой угловую скорость вращения, то  $Q$  представляет собой момент силы); в таком случае эффект всех сил, приложенных к твердому телу, представится в виде суммы

$$\sum Q \cdot \dot{q}.$$

С другой стороны, и кинетическая энергия тела может быть представлена в виде скалярного произведения обобщенного импульса на обобщенную скорость:

$$2T = \sum (P\dot{q})$$

(ср. стр. 23, 18; если  $P$  означает момент импульса, то  $\dot{q}$  будет означать угловую скорость вращения тела). Если мы возьмем производную от этого выражения по времени, то получим

$$2\dot{T} = \sum (\dot{P}\dot{q}) + \sum (P\ddot{q}).$$

Мы предлагаем читателю, пользуясь вышеприведенными формулами для кинетической энергии твердого тела, самому доказать, что оба члена этой суммы одинаковы и что мы можем написать:

$$T = \sum (\dot{P}\dot{q}).$$

Приравняв эффект сил быстроте изменения кинетической энергии, получаем

$$\sum Q = \sum \dot{P}.$$

Это обобщенное уравнение содержит в себе и уравнение движения центра тяжести и уравнение моментов, которое мы имели в предыдущих двух параграфах.

Мы получим еще большее обобщение (когда изменяется не только кинетическая, но и потенциальная энергия твердого тела), если, пользуясь выражением для кинетической и потенциальной энергии твердого тела, мы составим уравнения Лагранжа (ч. II, стр. 227, 148) или Гамильтона (ч. II, стр. 242, 158). Этим методом мы воспользуемся ниже при выводе уравнений движения твердого тела, закрепленного одной своей точкой (глава VI).

**23. О точках приложения сил.** Каждая сила, действующая на материальное тело, имеет определенное место в теле, на которое она действует непосредственно; это место может представлять часть поверхности тела или часть его объема. В последующих частях „Теоретической физики“ мы будем различать поверхностные силы и объемные силы. Но здесь, в „Механике твердого тела,“ нам нет необходимости делать это различие, а предположив, что элемент поверхности или элемент объема, на которые действует сила, очень мал, мы можем принять, что силы приложены к определенным материальным точкам твердого тела. Подобную точку обыкновенно называют *точкой приложения* силы, а самую силу изображают в виде вектора, отложенного от этой точки в направлении действия силы; длину вектора откладывают в соответственно выбранном масштабе. Таким образом в общем случае нам может быть дано тело, в различных точках которого приложены данные силы. Но, кроме этого, могут быть даны добавочные условия, благодаря которым в некоторых точках тела возникнут силы реакции, которые непосредственно не даны нам, но которые должны быть определены из добавочных условий. Но

если даже все силы и все моменты сил нам уже известны, то нам необходимо определить равнодействующую этих сил и моментов для того, чтобы определить движение тела. При решении подобных задач часто прибегают к преобразованию данных сил и моментов, чтобы упростить решение задачи; подобные преобразования в особенности употребительны в технике при графическом способе решения задач механики. Хотя мы здесь и не будем пользоваться графическим методом, тем не менее мы считаем необходимым дать здесь краткие сведения о преобразовании сил и моментов, оставаясь в рамках теоретической физики.

**24. Преобразование сил.** Всякую силу  $F$  (рис. 9), действующую непосредственно на точку  $A$  твердого тела, мы можем перенести в любую другую точку  $B$ , лежащую на линии действия силы, потому что при таком переносе ни проекции силы на оси координат, ни момент силы вокруг выбранной нами основной точки нисколько не изменятся, и следовательно, основные уравнения движения тела (уравнение импульса и уравнение моментов 26, 20) останутся в силе.

Обычно такой перенос силы в другую точку мотивируется следующим образом.

Приложим в точке  $B$  две силы  $F_1$  и  $F_2$ , равные  $F$  и взаимно-противоположные; от этого ни равновесие, ни движение тела измениться не могут. Но действие силы  $F_2$  уравнивается действием силы  $F$ , и следовательно, мы можем считать, что на тело действует одна только сила  $F_1$ . А это и означает, что мы перенесли точку приложения силы  $F$  из  $A$  в  $B$ . Из этого рассуждения мы, между прочим, видим, что такой перенос силы без

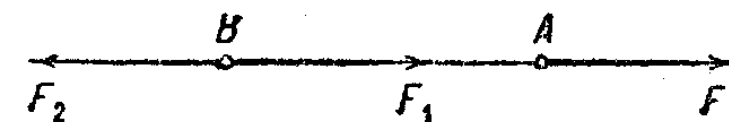


Рис. 9. Перенос силы в другую точку без изменения момента.

изменения условий задачи возможен, строго говоря, только в абсолютно твердом теле, потому что в действительно упругих телах силы  $F$  и  $F_2$ , хотя и будут уравнивать друг друга, но они в то же самое время будут *растягивать* (или *сжимать*) тело между точками  $A$  и  $B$ ; а между тем этого растяжения (или сжатия) в первоначальных условиях задачи совсем не было. Правда, в абсолютно твердом теле силы, растягивающие (или сжимающие) часть тела, никаких изменений в расстоянии между точками  $A$  и  $B$  произвести не могут, а потому в абсолютно твердом теле (механику которого мы сейчас изучаем) указанные выше переносы силы допустимы.

Иногда приходится переносить силы в другие точки тела, не лежащие на линии действия силы. Если мы даже оставим *направление* силы неизменным, т. е. перенесем силу параллельно ее первоначальному направлению, причем проекции силы на оси координат не изменятся, тем не менее может измениться *момент* силы  $[rF]$  вокруг выбранной нами основной точки  $O$ ; обозначим это изменение момента через

$$M_1 = [r_1 F] - [rF].$$

Тогда мы можем поступить двояко, а именно:

1) Перенести все силы так, как это нам оказалось удобным, и применить к этому новому расположению сил уравнение импульсов

$$\dot{P} = \sum F,$$

правая часть которого от переноса сил параллельно самим себе не изменилась, уравнение же моментов мы изменяем сообразно с изменившимся расположением сил, вычитая из него те моменты, которые внесены нами переносом сил в другие точки:

$$K = \sum M - \sum M_1.$$

2) Или же мы можем делать расчет движения центра тяжести по первому уравнению, пользуясь расположением уже перенесенных сил, а при расчете моментов предполагать силы еще не перенесенными; это тем более возможно, что, как увидим ниже, для упрощения расчета моментов имеются другие методы.

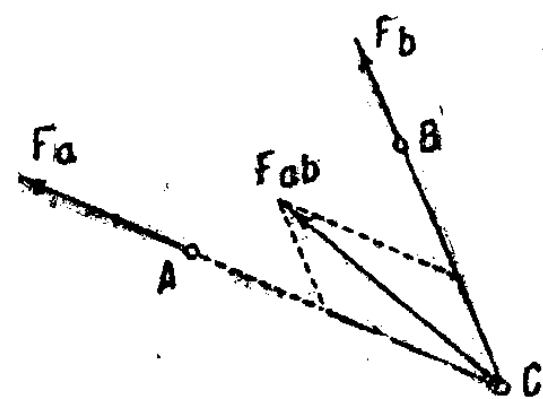


Рис. 10. Сложение компланарных сил.

25. Многоугольник сил. Если силы, действующие на твердое тело, находятся в одной плоскости (компланарные силы; такие случаи часто встречаются в технике), то их нетрудно соединить в одну равнодействующую, не изменяя моментов. Пусть, например, даны две силы  $F_a$ ,  $F_b$  (рис. 10), приложенные к точкам  $A$  и  $B$ . Перенесем силы  $F_a$  и  $F_b$  в точку  $C$  пересечения линий их действия; здесь в точке  $C$  мы можем соединить обе

силы в одну равнодействующую по известному правилу параллелограмма. Полученную силу  $F_{ab}$  мы совершенно таким же способом можем соединить с третьей силой  $F_c$  и т. д.

Очевидно, что таким образом можно соединить сколько угодно сил, лежащих в одной плоскости, в одну равнодействующую.

В том случае, когда данные силы не лежат в одной плоскости, сложение их в одну равнодействующую уже не может быть произведено без изменения моментов. Но если мы имеем в виду решать только уравнение импульса (а не моментов), то можем переносить силы параллельно их первоначальному направлению в одну общую точку и в этой точке сложить все силы по правилу сложения векторов. Так как положение этой точки остается при этом произвольным, то обычно применяют следующий способ. Выбирают какую-либо (удобную) точку  $O$  пространства (она может лежать и вне тела) и от нее проводят линию, параллельную одной из сил, действующих на твердое тело. Отложив на этой линии и в подходящем масштабе величину первой силы (рис. 11), откладывают от конца ее (в том же масштабе) вектор, равный и параллельный второй силе, и т. д. до последней силы. Затем начало первой силы соединяют с концом последней силы. Этот вектор и будет представлять собой равнодействующую всех сил, приложенных к телу. Точка приложения этой равнодействующей остается пока неопределенной, но первое основное уравнение

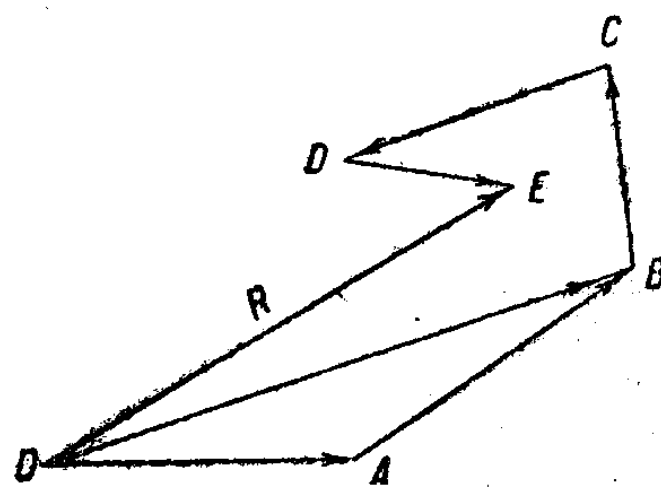


Рис. 11. Многоугольник сил.

(импульсов) показывает, что эту равнодействующую нужно считать приложенной к центру инерции твердого тела.

В общем случае составленный нами многоугольник сил, приложенных к телу, может и не укладываться на плоскости; однако этот способ черчения многоугольника сил применяется, главным образом, тогда, когда его можно начертить на плоскости. Если же все силы параллельны, что также часто встречается в технических задачах, то весь многоугольник укладывается на одной линии.

26. Пара сил. Две силы  $F_1$ ,  $F_2$  одинаковой величины, но противоположного направления, находящиеся на расстоянии  $a$  друг от друга (рис. 12), называются парой сил. Очевидно, что равнодействующая пары всегда равна нулю, а момент пары вокруг какой-либо точки пространства равен величине одной из сил, умноженной на расстояние между силами; направление вектора момента перпендикулярно к плоскости пары. Для того, чтобы убедиться в справедливости сказанного, представим себе пару сил  $F_1$ ,  $F_2$  (рис. 13) и а нормальное к ним расстояние, или

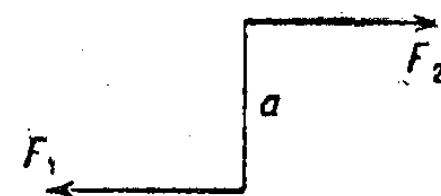


Рис. 12. Пара сил.

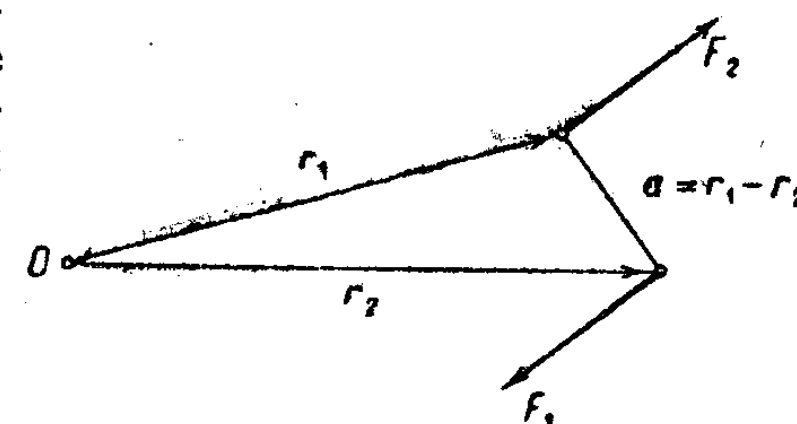


Рис. 13. Момент пары.

плечо пары и, выбрав какую-либо точку  $O$  пространства, составим сумму моментов сил пары вокруг этой точки:

$$M = [r_1 F_1] + [r_2 F_2].$$

Но так как силы пары равны и противоположны, то мы можем написать:

$$M = [(r_1 - r_2) F] = [aF].$$

Направление этого момента перпендикулярно к векторам  $a$  и  $F$ , т. е. перпендикулярно к плоскости пары. Таким образом наше утверждение, что момент пары сил (вокруг любой точки пространства) равен произведению одной из сил на расстояние между силами и что направление этого момента перпендикулярно к плоскости пары, доказано.

27. Примеры пар сил. Пары сил довольно часто встречаются в действительности, в особенности в технике. Когда мы завинчиваем буравчик, мы действуем на обе половины его ручки двумя силами, равными и противоположными, направленными перпендикулярно к ручке (плечо пары). Если эти две силы не будут равны и противоположны, то буравчик наклонится и не будет идти по направлению своей оси. Подобную же пару сил мы прилагаем при завинчивании винта, гайки, или при закручивании пилки, проволоки и т. п. Каждый двигатель, в частности электродвигатель, обладает парой сил на своей оси, или на своем шкиве: эта пара сил может быть передана при помощи ремня другому шкиву какого-либо механизма и т. д.

Понятие о «паре сил» бывает иногда полезно в тех случаях, когда распределение самих сил в теле неизвестно, а известен только момент этих сил. Так, например, представим себе балку, заделанную в стену (рис. 14); если на балке висит груз  $P$ , то он образует момент сил  $Pa$  вокруг той точки  $A$ , где заделана балка: для того чтобы балка выдерживала груз  $P$  и не вываливалась из стены, в месте ее заделки должны действовать силы реакции, момент которых должен быть равен и противоположен моменту  $Pa$ . Не зная, как именно распределены эти силы реакции (это зависит от способа заделки), мы тем не менее можем заменить их парой сил с моментом —  $Pa$ .

На основании аналогичных рассуждений мы приходим к заключению, что в каждом сечении балки  $B$  тоже должна действовать пара сил с моментом —  $Pb$ . Действительно, груз  $P$  действует на это сечение моментом  $Pb$  и стремится сломать балку в этом месте. Этому излому сопротивляются упругие силы реакции, уравнивающие момент силы  $Pb$ , т. е. образующие момент, равный и противоположный —  $Pb$ . Не зная пока распределения упругих сил, мы можем заменить их парой с моментом —  $Pb$ .

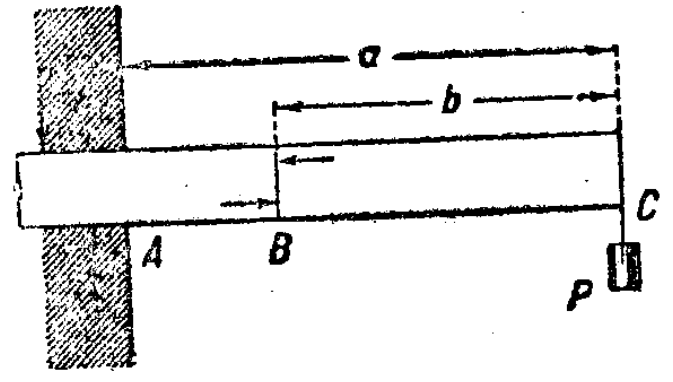


Рис. 14. Балка, вделанная в стену.

Вообще, как видим, пара сил представляет собой более наглядное понятие, заменяющее понятие момента сил, а потому оно часто употребляется, главным образом, в технических расчетах. 28. Преобразование пар сил. Пара сил допускает еще большие преобразования, чем сила. Действительно, мы можем переносить пару сил в ее плоскости в каком угодно направлении, так как от этого момент пары не изменится ни по величине, ни по направлению. Мы можем переносить пары и в другие параллельные плоскости. Мы можем изменять направление и величину сил, составляющих пару, а также и принимать эти силы приложенными к каким угодно другим точкам тела, лишь бы при всех этих преобразованиях момент пары не изменялся ни по величине, ни по своему направлению. Однако и здесь мы должны сделать то же замечание, что и при переносе сил в другие точки тела: все эти преобразования допустимы только в механике абсолютно твердого тела; в упругих телах подобные преобразования изменят распределение внутренних упругих сил в теле и, следовательно, изменят условия рассматриваемой задачи.

Укажем еще на разницу между векторами сил и вектором момента пары сил. В то время как сила всегда должна быть дана с определенной точкой приложения или по крайней мере с какой-либо точкой, через которую должна проходить линия вектора силы, вектор момента пары силы может быть дан только своей величиной и своим направлением, без определенной точки приложения. Подобные векторы иногда называют свободными векторами.

29. Преобразование сил и пар сил. На основании вышесказанного мы можем преобразовывать системы сил, приложенных к твердому телу, и моменты этих сил весьма разнообразными способами. Так как эти

способы часто употребляются в технических расчетах, то мы укажем здесь кратко на некоторые из них.

Перенесем все силы, действующие на твердое тело в одну точку  $O$  (например, в центр инерции тела) и сложим их по правилу многоугольника сил в одну равнодействующую (рис. 11). Эта равнодействующая и будет входить у нас в уравнение импульсов. Одновременно с этим, т. е. предполагая силы еще на своих первоначальных местах, определим моменты сил вокруг какой-либо точки  $O$ . Все полученные таким образом векторы моментов мы можем сложить тоже по правилу многоугольника векторов в один равнодействующий момент сил вокруг этой точки  $O$ . Полученный момент мы заменим одной парой сил, и так как момент пары не имеет

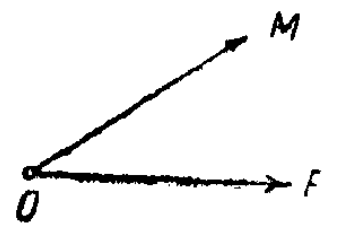


Рис. 15.

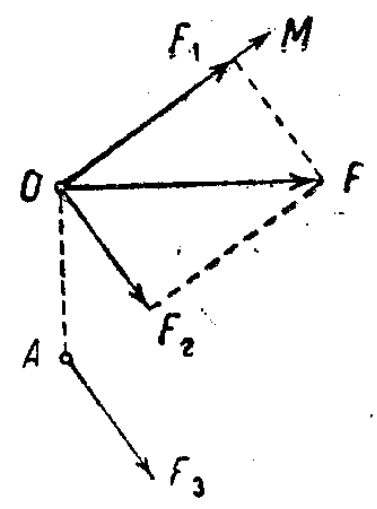


Рис. 16.

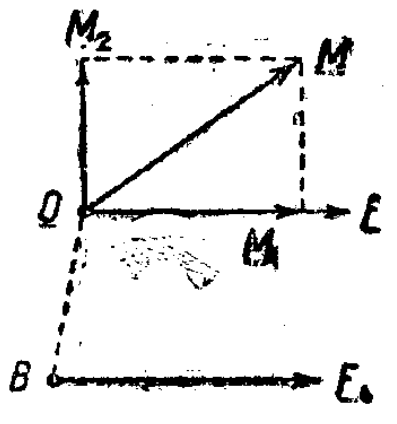


Рис. 17.

Преобразование сил и пар сил.

определенной точки приложения, то мы можем считать его приложенным к той же точке  $O$ , где приложена равнодействующая всех сил. Таким образом мы привели всю систему сил, действующих на твердое тело, к одной силе  $F$  и к одной паре сил  $M$ , отнесенных к одной и той же точке  $O$  (рис. 15).

Далее, мы можем разложить равнодействующую  $F$  на две силы (рис. 16): одну из них  $F_1$  ( $= F \cos \alpha$ ) взять по направлению момента  $M$ , а другую  $F_2$  ( $= F \sin \alpha$ ) — перпендикулярно к этому направлению. Силу  $F_2$  мы перенесем параллельно ее направлению в некоторую точку  $A$ , выбранную таким образом, чтобы момент ее вокруг точки  $O$  был равен моменту  $M$ :

$$[r F_2] = M$$

(это можно сделать, потому что  $F_2$  перпендикулярно к  $M$ ).

При таком переносе мы должны будем (для восстановления условий задачи) вычесть из данных моментов внесенный нами новый момент  $M$ ; а так как внесенный нами момент равен данному, то моменты уничтожаются, и у нас останутся только две силы  $F_1$  и  $F_2$ , эквивалентные всем данным нам силам и их моментам. Само собой разумеется, что если данные моменты  $M$  не были равны нулю, то полученные нами две силы уже не будут проходить через одну и ту же точку, и их направления не будут пересекаться друг с другом.

Наконец, мы можем поступить еще и так. Вместо того, чтобы раскладывать силу  $F$ , разложим вектор момента  $M$  на две составляющие (рис. 17): одну возьмем по направлению силы  $M_1$  ( $= M \cos \alpha$ ), а другую  $M_2$  ( $= M \sin \alpha$ ) — перпендикулярно к этому направлению.

Вторую из этих составляющих мы можем заменить переносом силы  $F$



параллельно ее направлению в такую точку  $B$  и на такое расстояние от плоскости  $(FM)$ , чтобы

$$[rF_4] = M_2$$

(это можно сделать, потому что  $F_4$  перпендикулярно к  $M_2$ ).

Таким образом мы привели действие всех сил к одной равнодействующей силе  $F_4$  и к одному моменту  $M_1$  (к паре сил), направление которого параллельно этой равнодействующей (ср. Винтовое движение тела: 11, 6).

**30. Параллельные силы.** Если все силы, действующие на твердое тело, параллельны, то и результирующая сила будет иметь направление, параллельное силам, а величина равнодействующей будет равна алг. браической сумме всех сил. Если силы образуют момент, то он будет иметь направление, перпендикулярное к равнодействующей силе. Точка приложения равнодействующей остается при этом неопределенной.

Поставим себе задачей найти такую точку приложения равнодействующей, чтобы положение ее было независимо от направления сил относительно твердого тела. Это надо понимать следующим образом. Представим себе, что мы поворачиваем тело, причем точки приложения сил остаются неизменными, и направление всех сил тоже остается неизменным относительно внешнего неподвижного пространства; но, конечно, относительно материальных точек самого тела направление сил будет изменяться: оставаясь параллельными, все силы будут поворачиваться вокруг своих точек приложения в сторону, противоположную повороту тела. Такое именно явление мы получим, если тело помещено в каком-либо поле сил, постороннего происхождения, например, в поле земного тяготения. Докажем, что при таком повороте тела в поле параллельных сил равнодействующая всех сил всегда проходит через одну и ту же точку тела (или через точку, неизменно связанную с телом). Эту точку называют *центром параллельных сил*. В случае поля земного тяготения эта точка будет *центром тяжести* тела.

Обозначим через  $\alpha, \beta, \gamma$  косинусы углов, образуемых силами (а также и равнодействующей этих сил) с осями неподвижных координат. Проекции каждой силы  $F_i$  на оси координат будут:

$$F_{ix} = \alpha F_i; \quad F_{iy} = \beta F_i; \quad F_{iz} = \gamma F_i.$$

Точно так же и проекции равнодействующей  $F$  будут:

$$F_x = \alpha F; \quad F_y = \beta F; \quad F_z = \gamma F.$$

Равнодействующую эту нужно провести на таком расстоянии от начала, чтобы момент ее вокруг начала был равен сумме моментов всех сил вокруг этого начала:

$$M = [r_c F] = \sum [r_i F_i].$$

Пользуясь этими соотношениями, напишем выражения проекции на ось  $Ox$  момента всех сил вокруг начала координат и приравняем их сумме проекции на ось  $Ox$  момента равнодействующей  $F$ :

$$\begin{aligned} M_x &= y_c F_z - z_c F_y = \gamma \cdot y_c F - \beta \cdot z_c F = \\ &= \sum y_i F_{iz} - \sum z_i F_{iy} = \gamma \sum y_i F_i - \beta \sum z_i F_i. \end{aligned}$$

Величины  $\alpha, \beta$  как общие всем силам, мы вынесем за знаки сумм. Из этих уравнений и из других двух, им подобных, мы непосредственно заключаем, что искомая точка приложения равнодействующей (которая должна быть независима от величины  $\alpha, \beta, \gamma$ ) определяется уравнениями:

$$x_c = \frac{\sum x_i F_i}{F}; \quad y_c = \frac{\sum y_i F_i}{F}; \quad z_c = \frac{\sum z_i F_i}{F}.$$

Следовательно, этими уравнениями определяется *центр* параллельных сил, действующих на твердое тело. Момент всех сил вокруг этой точки, очевидно, будет равен нулю.

**31. Пример.** Если тело находится в *однородном* поле тяготения, то к каждой материальной точке тела массы  $dm$  приложена сила  $g \cdot dm$ , где  $g$  есть ускорение силы тяжести в пределах рассматриваемого тела. При незначительных размерах тела мы можем считать величину  $g$  в пределах тела везде одинаковой и величины и одинакового направления. Центр этих параллельных сил определится из выражений вида:

$$x_c = \frac{\sum x_i g \cdot dm}{gM}.$$

Сокращая на  $g$  и заменяя суммы интегралами, распространенными на весь объем тела, получаем:

$$x_c = \frac{1}{M} \int x \cdot dm; \quad y_c = \frac{1}{M} \int y \cdot dm; \quad z_c = \frac{1}{M} \int z \cdot dm$$

(ср. стр. 17, 11.)

**32. Поле тяготения, образуемое телом.** Как известно (четвертый закон механики Гюльтона, ч. II, стр. 33, 21), каждые две материальные точки взаимодействуют друг с другом с силой, пропорциональной их массам и обратно пропорциональной квадрату их взаимного расстояния. Коэффициент пропорциональности оказывается для любых масс, независимо от их величины, формы и химического состава, одинаковым и равным

$$k = 6,66 \cdot 10^{-8} \text{ дин} \cdot \text{см}^2 \cdot \text{г}^{-2}.$$

Если мы обозначим через  $F$  силу, с которой масса  $m$  действует на массу  $m_1$ , то можем написать:

$$F = m_1 \frac{km}{r^2} r_1,$$

где  $r_1$  означает единичный вектор, проведенный от притягиваемой точки к притягивающей точке. В некоторых случаях желают избежать единичных векторов и умножают числитель и знаменатель на  $r$ :

$$F = m_1 \frac{km}{r^3} r.$$

При расчетах взаимодействий обыкновенно поступают так: сперва рассчитывают поле напряжений притягивающего тела, а затем определяют действие этого поля на притягиваемое тело. Правда, при введении второго тела поле тяготения изменяется, однако это изменение не играет существенной роли, потому что введенное нами поле второго тела не может

изменить его собственное движение. Однако это замечание справедливо только для абсолютно твердых, *неизменяемых* тел; в деформируемых телах дело обстоит гораздо сложнее, потому что форма каждого тела, а вместе с тем и поле его тяготения, будет зависеть от действия обоих тел вместе. Но в механике абсолютно твердых тел у нас нет этих осложнений. Мы можем, следовательно, рассчитать *напряжение* действующего поля какого-либо сплошного твердого тела по формуле

$$\mathbf{g} = k \int \frac{dm}{r^3} \mathbf{r},$$

где  $r$  означает расстояние каждой материальной точки тела от рассматриваемой точки поля. Здесь подразумевается интегрирование геометрическое, которого можно избежать, рассчитав предварительно скалярное поле потенциалов (ч. I, глава II):

$$V = k \int \frac{dm}{r}.$$

А затем, по известному потенциальному полю путем дифференцирования определяется поле его градиента

$$\mathbf{g} = -\text{grad } V = -\nabla V.$$

Общую теорию подобных полей мы излагали уже в *первой части* „Теоретической физики“, а здесь мы ограничимся разбором некоторых наиболее часто встречающихся полей.

**33. Центральное поле.** Чаще всего приходится иметь дело с полем тяготения, образуемым одной материальной точкой или с наружным полем однородного шара. Оба эти поля одинаковы: они симметрично расположены во все стороны, и линии сил их радиальны. Наружное поле однородного шара мы можем заменить полем одной материальной точки, помещенной в центре шара и имеющей массу, равную всей массе шара.

Потенциал и напряжение этого поля будут выражаться формулами:

$$V = k \frac{m}{r}; \quad \mathbf{g} = k \frac{m}{r^3} \mathbf{r}.$$

Этими же формулами мы можем пользоваться и в тех случаях, когда тело, образующее поле, имеет любую форму, но находится от рассматриваемой точки поля на очень большом расстоянии по сравнению с размерами тела. Так, например, при вычислении взаимодействий между Солнцем и планетами (ч. II, глава IV) заменяют их материальными точками, помещенными в их центрах.

Все поля, которые эквивалентны полю материальной точки, называются *центральными полями*.

Если мы введем в такое центральное поле массы  $m_0$  какое-либо твердое тело, то сила, с которой поле будет действовать на тело, определится из формулы

$$\mathbf{F} = km_0 \int \frac{dm}{r^3} \mathbf{r}.$$

При этом для различных точек  $dm$  тела, внесенного в поле, величина  $\mathbf{r}$  будет, вообще говоря, различная. Если размеры притягиваемого тела малы по сравнению с расстоянием его точек до центрального тела, то в первом приближении можно считать  $\mathbf{r}$  для всех точек тела одинаковым, или иначе говоря, считать поле в пределах тела однородным и написать:

$$\mathbf{F} = km_0 \frac{m}{r^3} \mathbf{r}.$$

Так мы поступали, изучая движение тел у поверхности Земли (ч. II, стр. 41, 29, и глава III).

Если притягиваемое тело представляет собой однородный шар или шар, плотность которого распределена симметрично вокруг центра, вообще, если *притягиваемое* тело само образует вокруг себя *центральное* поле тяготения, то и действие на него *постороннего центрального поля* будет иметь равнодействующую, проходящую через *центр* шара. Это прямо следует из принципа равенства действия и противодействия (третий закон Ньютона), но это видно также из наших формул. Действительно множитель при  $m_0$  в формуле силы

$$\mathbf{g}_1 = k \int \frac{dm}{r^3} \mathbf{r}$$

представляет собою не что иное, как напряжение поля, образуемого *притягиваемым* телом; а если это притягиваемое тело сферично, то напряжение поля, им образуемое, в той точке, где помещается притягивающее тело, равно

$$\mathbf{g}_1 = \frac{km}{r^3} \mathbf{r},$$

и следовательно, центральное поле действует на однородный шар как на материальную точку, помещенную в его центре и имеющую массу всего шара.

Отсюда следует также, что и два однородных шара взаимодействуют как две материальные точки, помещенные в их центрах.

**34. Поле внутри однородного эллипсоида.** Следующее по своей важности это — поле однородного эллипсоида. Этот случай важен не только по своим астрономическим и геофизическим применениям, но также и потому, что представляет собой простейший тип поля, не обладающего центральной симметрией. Мы не будем приводить здесь довольно сложные вычисления поля эллипсоида (читатель может найти их в специальных работах), а дадим только конечные формулы и объясним их геометрическое значение.

Пусть нам дан однородный эллипсоид везде одинаковой плотности  $\rho$  с полуосями  $a, b, c$ . Масса этого эллипсоида будет равна

$$M = \frac{4}{3} \pi abc.$$

Возьмем декартову систему координат с началом в центре эллипсоида и направим оси  $OX, OY, OZ$  по главным осям эллипсоида  $a, b, c$ .

Обозначим через  $x, y, z$  координаты той точки пространства, в которой мы желаем определить напряжение поля тяготения (сила поля, действующая на единицу массы).

Нужно различать два случая: когда рассматриваемая точка находится *внутри* эллипсоида и когда рассматриваемая точка находится в *наружном* пространстве; формулы для этих случаев получаются разные.

Для *внутренних* точек эллипсоида, а также для точек на его поверхности поле определяется потенциалом

$$V = \Phi - \frac{1}{2}(Ax^2 + By^2 + Cz^2),$$

где  $\Phi, A, B, C$  суть *постоянные* для данного эллипсоида величины, они вычисляются по формулам:

$$\Phi = \frac{3}{4} M \int_0^{\infty} \frac{du}{V(a^2+u)(b^2+u)(c^2+u)};$$

$$A = \frac{3}{2} M \int_0^{\infty} \frac{du}{(a^2+u)V(a^2+u)(b^2+u)(c^2+u)}.$$

Формулы для остальных постоянных  $B$  и  $C$  построены так же, как и формула  $A$ , только на место первого множителя при корне в знаменателе  $(a^2+u)$  нужно поставить  $(b^2+u)$  и соответственно  $(c^2+u)$ . Постоянное  $\Phi$ , очевидно, представляет значение потенциала в центре эллипсоида (при  $x=y=z=0$ ); эта величина подобрана так, чтобы потенциал бесконечно удаленных точек равнялся нулю и чтобы потенциал на поверхности эллипсоида не претерпевал перерыва.

По потенциалу  $V$  определяется напряжение поля внутри эллипсоида:

$$G_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = Ax; \quad G_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = By; \quad G_z = -\frac{\partial V}{\partial z} = Cz.$$

Как видим, соотношение между векторами  $\mathbf{g}$  и  $\mathbf{r}$  (радиус-вектор, проведенный из центра в рассматриваемую точку с координатами  $x, y, z$ ) представляет собой *тензор* (ср. ч. I, стр. 152, рис. 112). Поэтому напряжение  $\mathbf{G}$  не будет везде направлено по радиусу (как в случае шара); линии сил будут кривые, сходящиеся в центре эллипсоида; только те линии, которые идут по главным осям, будут прямыми. Это мы можем заключить также из формулы для потенциала. Эквипотенциальные поверхности

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = \text{const}$$

будут представлять систему *подобных* и одинаково расположенных эллипсоидов, длины полуосей которых будут пропорциональны величинам:

$$\frac{1}{\sqrt{A}}; \quad \frac{1}{\sqrt{B}}; \quad \frac{1}{\sqrt{C}}.$$

Поверхности одинаковых напряжений

$$G^2 = A^2x^2 + B^2y^2 + C^2z^2 = \text{const}$$

тоже будут подобные и одинаково расположенные эллипсоиды, длины полуосей которых пропорциональны величинам

$$\frac{1}{A}; \quad \frac{1}{B}; \quad \frac{1}{C}.$$

Мы предлагаем читателю положить в вышеприведенных интегралах  $a=b=c$  и получить, таким образом, внутреннее поле однородного шара (ч. I, стр. 92, 94).

35. Наружное поле эллипсоида. Для вычисления *наружного поля* тяготения эллипсоида проще всего будет, если мы воспользуемся теоремой Маклорена (которую мы здесь доказывать не будем), по которой *конфокальные эллипсоиды одинаковой массы образуют одинаковые поля тяготения* в наружном пространстве. Как известно, конфокальные эллипсоиды имеют общее уравнение

$$\frac{x^2}{a^2+q} + \frac{y^2}{b^2+q} + \frac{z^2}{c^2+q} = 1,$$

где параметр  $q$  имеет для различных эллипсоидов разное значение.

Если мы заменим данный нам эллипсоид другим, ему конфокальным и выбранным так, чтобы его поверхность проходила через рассматриваемую точку  $x, y, z$ , и припишем ему ту же массу  $M$ , то сила, действующая на эту точку, будет та же самая, как и прежде. Но теперь наша точка лежит *на поверхности* эллипсоида, и мы можем применить для расчета формулы предыдущего параграфа. Итак, для расчета наружного поля мы можем применить формулы предыдущего параграфа, заменив под интегралами величины  $a^2, b^2, c^2$  через  $(a^2+q), (b^2+q), (c^2+q)$ . Кроме того, мы можем величину  $(q+u)$  обозначить через  $u$  (величина  $q$  для рассматриваемой точки *постоянна* и определяется из уравнения конфокальных эллипсоидов, в котором  $x, y, z$  означают координаты этой точки), но зато нижний предел интегрирования взять равным  $q$  вместо нуля. Тогда мы получаем:

$$\Phi = \frac{3}{4} M \int_q^{\infty} \frac{du}{V(a^2+u)(b^2+u)(c^2+u)};$$

$$A = \frac{3}{2} M \int_q^{\infty} \frac{du}{(a^2+u)V(a^2+u)(b^2+u)(c^2+u)}.$$

Теперь величины  $\Phi, A, B, C$  уже *не постоянны*, а для каждой точки поля имеют особое значение. Правда, на поверхности каждого конфокального эллипсоида величины эти остаются постоянными, но эквипотенциальные поверхности

$$V = \Phi - \frac{1}{2}(Ax^2 + By^2 + Cz^2)$$

уже не будут эллипсоидами; их иногда называют *плинтоидами*. Плинтонид представляет собой нечто среднее между эллипсоидом и параллелепипедом с закругленными углами и вздутыми гранями. Линии сил будут кривые, нормальные к плинтоидам.

Из написанных формул мы непосредственно видим, что для бесконечно удаленных точек ( $q = \infty$ ) потенциал равен нулю. Для точек, лежащих на поверхности данного нам эллипсоида ( $q = 0$ ), потенциал наружного поля непрерывно переходит в потенциал внутреннего поля. Мы предлагаем читателю, как интересное математическое упражнение, самому доказать, что данные выше формулы потенциала для наружных точек пространства удовлетворяют уравнению Лапласа (ч. I, стр. 71, 76):

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \nabla^2 V = 0,$$

тогда как потенциал во внутренних точках эллипсоида удовлетворяет уравнению Пуассона:

$$\nabla^2 V = -4\pi\rho.$$

Чем меньше величины  $a^2$ ,  $b^2$ ,  $c^2$  и чем больше  $q$ , тем больше конфокальные эллипсоиды и плинтониды делаются похожими на шары; следовательно, вдали от эллипсоида поле постепенно делается *радиальным*.

36. Эллипсоид вращения. В практических применениях большею частью имеют дело с эллипсоидом вращения; а в таком случае вышеприведенные интегралы могут быть выражены в конечной форме при помощи обычно встречающихся функций ( $\text{tg}$  и  $\text{lg}$ ). Итак, положим в подинтегральных выражениях  $b = c$ ; кроме того, так как ось  $OX$  представляет собой *ось симметрии* не только данного нам эллипсоида, но и всего поля, то для описания поля нам достаточно двух координат: прежней координаты  $x$  и новой координаты  $r = \sqrt{y^2 + z^2}$ , представляющей расстояние рассматриваемой точки поля от оси  $OX$ . Сообразно с этим и выражение для потенциала будет теперь иметь вид:

$$V = \Phi - \frac{1}{2}(Ax^2 + Dr^2).$$

Точно так же и уравнение конфокальных эллипсоидов упрестится:

$$\frac{x^2}{a^2 + q} + \frac{r^2}{b^2 + q} = 1.$$

При вычислении интегралов удобно различать два случая: во-первых, когда данный нам эллипсоид сплюснутый (как Земля), т. е. когда  $b > a$ , и, во-вторых, когда он вытянутый, т. е. когда  $b < a$ . Мы начнем с первого случая и введем обозначения:

$$f^2 = b^2 - a^2; \quad a_1^2 = a^2 + q; \quad b_1^2 = b^2 + q.$$

Нетрудно видеть, что  $f$  представляет собой фокусное расстояние эллипсоид, получающихся при пересечении эллипсоида плоскостью, проведенной через ось  $OX$  (так называемое *меридиональное сечение* — наз-

вание, взятое из географии). Величины  $a_1$  и  $b_1$  суть полуоси того конфокального эллипсоида, поверхность которого проходит через рассматриваемую точку поля. При этих обозначениях мы получим:

$$A = \frac{3M}{f^3} \left[ \frac{f}{a_1} - \text{arctg} \frac{f}{a_1} \right];$$

$$\Phi = \frac{3M}{2f} \text{arctg} \frac{f}{a_1};$$

$$D = \frac{-3M}{2f^3} \left[ \frac{fa_1}{b_1^2} - \text{arctg} \frac{f}{a_1} \right];$$

Для вытянутого эллипсоида  $a > b$ , и величина  $f$  делается мнимой. Поэтому (во избежание мнимых величин в формулах) мы введем обозначение

$$f_0^2 = a^2 - b^2,$$

которое для данного случая тоже будет представлять собой фокусное расстояние меридиональных сечений. Между  $f$  и  $f_0$  мы имеем соотношения:

$$f^2 = -f_0^2; \quad f = -if_0; \quad f_0 = -if.$$

Подставив это значение  $f$  в прежние формулы и воспользовавшись общей формулой

$$\text{arctg} \left( -i_0 \frac{f_0}{a_1} \right) = -i \text{lg} \sqrt{\frac{a_1 + f_0}{a_1 - f_0}},$$

мы получаем для вытянутого эллипсоида:

$$A = \frac{-3M}{f_0^3} \left[ \frac{f_0}{a_1} - \text{lg} \sqrt{\frac{a_1 + f_0}{a_1 - f_0}} \right];$$

$$\Phi = \frac{3M}{2f_0} \text{lg} \sqrt{\frac{a_1 + f_0}{a_1 - f_0}};$$

$$D = \frac{3M}{2f_0^3} \left[ \frac{f_0 a_1}{b_1^2} - \text{lg} \sqrt{\frac{a_1 + f_0}{a_1 - f_0}} \right].$$

Все эти формулы относятся к *наружному* полю эллипсоида вращения. Для *внутреннего* поля, а также для точек на поверхности данного эллипсоида нам остается только положить  $q = 0$ .

В заключение мы считаем полезным еще прибавить, что приведенные нами формулы для *сплюснутого* эллипсоида вращения могут служить для расчета поля тонкого диска, который можно рассматривать как эллипсоид вращения с очень короткою осью симметрии  $a$ . Точно так же и формулы для *вытянутого* эллипсоида могут служить для расчета поля длинного цилиндра (с закругленными концами), который можно рассматривать как вытянутый эллипсоид вращения с очень длинной осью симметрии. Конечно, подобные расчеты не будут обладать абсолютной точностью, но для многих случаев практики они бывают достаточно точны. Это замечание имеет практическое значение, потому что точный расчет

поля диска или цилиндра представляет значительные математические трудности.

37. Сила, действующая на тело в центральном поле. Если тело, помещенное в центральном поле тяготения, не имеет формы шара или эллипсоида или если это тело неоднородно, то расчеты значительно усложнятся. Мы рассмотрим здесь тот случай, когда тело находится настолько далеко от притягивающего центра, что можно при расчетах довольствоваться некоторым приближением.

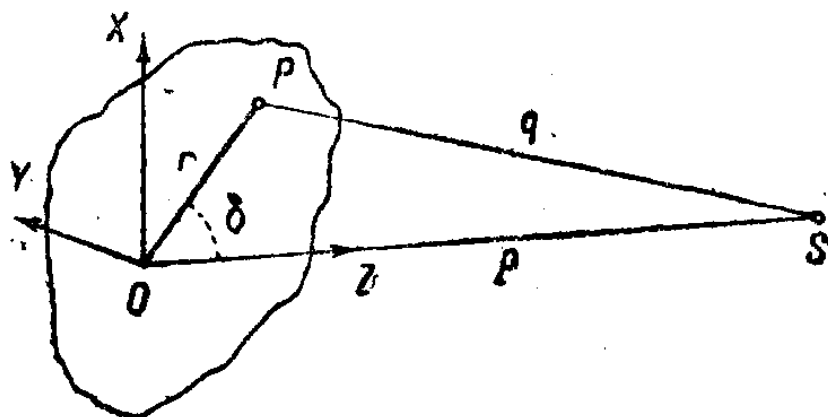


Рис. 18. Тело в центральном поле.

Пусть  $O$  (рис. 18) означает центр инерции рассматриваемого тела, которое может быть любой формы и с любым распределением масс; буквой  $P$  у нас обозначена одна из материальных точек тела с массой  $dm$ , а  $S$  пусть будет центр притяжения с массой  $m_0$ . Сила поля, действующая на точку  $P$ , будет выражаться формулой (ср. рис. 18):

$$dF = km_0 \frac{dm}{q^3} \cdot q.$$

Для дальнейших вычислений нам удобнее будет выразить  $q$  через  $p$  и  $r$

$$q = p - r = p \left( p_1 - \frac{r}{p} \right).$$

Кроме того, из треугольника  $OPS$  следует:

$$q^2 = p^2 - 2pr \cdot \cos \delta + r^2 = p^2 \left[ 1 - 2 \left( \frac{r}{p} \right) \cos \delta + \left( \frac{r}{p} \right)^2 \right].$$

После этих подстановок, сила, действующая на точку  $P$ , выразится так:

$$dF = \frac{km_0}{p^2} \left[ 1 - 2 \left( \frac{r}{p} \right) \cos \delta + \left( \frac{r}{p} \right)^2 \right]^{-\frac{3}{2}} \left( p_1 - \frac{r}{p} \right) \cdot dm.$$

Первый множитель в скобках мы разложим в ряд (по правилу бинома Ньютона), ограничиваясь вторыми степенями отношения  $\left( \frac{r}{p} \right)$ , которое мы будем предполагать малым в сравнении с единицей. Получаем:

$$dF = \frac{km_0}{p^2} \left[ 1 + 3 \left( \frac{r}{p} \right) \cos \delta + \frac{3}{2} \left( \frac{r}{p} \right)^2 \left[ 5 \cos^2 \delta - 1 \right] \right] \left( p_1 - \frac{r}{p} \right) \cdot dm.$$

Выберем оси координат с началом в центре тяжести тела  $O$  и направим ось  $OZ$  к центру притяжения  $S$ , а оси  $OX$  и  $OY$  расположим в пло-

скости, перпендикулярной к линии  $OS$  и проходящей через точку  $O$ . При таком выборе осей координат вектор  $\left( p_1 - \frac{r}{p} \right)$  будет иметь проекциями:

$$\begin{aligned} \text{на ось } OX: & \left( -\frac{x}{p} \right); & \text{на ось } OY: & \left( -\frac{y}{p} \right); \\ \text{на ось } OZ: & \left( 1 - \frac{z}{p} \right). \end{aligned}$$

Кроме того, мы имеем:

$$r \cos \delta = z; \quad r^2 \cos^2 \delta = z^2; \quad r^2 \sin^2 \delta = x^2 + y^2.$$

Приняв это во внимание, вычисляем проекцию равнодействующей на ось  $OZ$ :

$$\begin{aligned} dF_z &= \frac{km_0}{p^2} \left[ 1 + 3 \frac{z}{p} + 6 \frac{z^2}{p^2} - \frac{3}{2} \frac{x^2 + y^2}{p^2} \right] \left( 1 - \frac{z}{p} \right) \cdot dm, \\ F_z &= \frac{km_0}{p^2} m + 3 \frac{km_0}{p^3} \int z \cdot dm + 3 \frac{km_0}{p^4} \int z^2 \cdot dm - \frac{3}{2} \frac{km_0}{p^4} \int (x^2 + y^2) \cdot dm. \end{aligned}$$

В этой формуле первый член представляет собой силу, которую мы получили бы, если бы вся масса была сосредоточена в его центре инерции, или, другими словами, силу действия поля тяготения, которое в пределах рассматриваемого можно рассматривать как однородное; это представляет первое приближение нашего расчета.

Второй член у нас обращается в нуль, потому что для центра инерции (ср. стр. 18, 11)

$$\int z \cdot dm = 0.$$

Третий член составлен из двух частей, которые имеют множители:

$$\int z^2 \cdot dm = I_{xy}; \quad \int (x^2 + y^2) \cdot dm = I_z.$$

Здесь  $I_{xy}$  означает момент инерции тела относительно плоскости  $XY$ , тогда как  $I_z$  означает момент инерции тела относительно оси  $OZ$ , т. е. линии, соединяющей центр инерции тела с центром тяготения. Итак,

$$F_z = \frac{km_0}{p^2} m + 3 \frac{km_0}{p^4} \left[ I_{xy} - \frac{1}{2} I_z \right].$$

Вычисляя проекцию равнодействующей на ось  $OX$ :

$$F_x = - \frac{km_0}{p^2} \int x \cdot dm - 3 \frac{km_0}{p^4} \int z \cdot x \cdot dm,$$

мы замечаем, что при интегрировании первый член обращается в нуль; последние члены будут содержать отношение  $\frac{r}{p}$  в третьей степени, и мы ими пренебрегаем. Остается

$$F_x = -3 \frac{km_0}{p^4} E; \quad E = \int zx \cdot dm,$$

где  $E$  означает произведение инерции тела относительно оси  $OY$ , проведенной через центр инерции (ср. стр. 18, 12). Аналогичный результат мы получаем для проекции равнодействующей на ось  $OY$ :

$$F_y = -3 \frac{km_0}{p^4} D; \quad D = \int zy \cdot dm.$$

Полученные нами формулы хотя и представляют собой только второе приближение к истинным значениям силы  $F$ , но они очень поучительны. Прежде всего мы видим, что равнодействующая  $F$ , которая во всяком случае должна проходить через центр притяжения  $S$  (по той простой причине, что все ее составляющие, приложенные к отдельным точкам тела, проходят через  $S$ ), не всегда проходит через центр инерции тела, потому что  $F_x$  и  $F_y$  не равны нулю. Но если одна из главных осей инерции тела направлена по  $OS$ , то  $E$  и  $D$  обращаются в нуль и равнодействующая сил поля проходит через центр инерции (при принятом нами приближении). Тем не менее формула

$$F_z = \frac{km_0}{p^2} m + 3 \frac{km_0}{p^4} \left[ I_{xy} - \frac{1}{2} I_z \right]$$

показывает, что и в этом случае равнодействующая всех сил не приложена к центру инерции (центр тяжести не совпадает с центром инерции тела), а расположена ближе к центру притяжения  $S$  или дальше от него, смотря по знаку выражения, стоящего в скобках. Разберем несколько частных случаев.

Для однородного шара радиуса  $a$  мы имеем (расчеты в главе XIII этой книги):

$$I_{xy} = \frac{1}{5} ma^2; \quad I_z = \frac{2}{5} ma^2,$$

и следовательно,

$$I_{xy} - \frac{1}{2} I_z = 0.$$

Это означает, что равнодействующая проходит через центр шара. Мы знаем, что это верно в точности, а не только при втором приближении.

Для эллипсоида вращения  $a^2 = b^2$ , помещенного своей осью симметрии по линии  $OS$ , мы имеем (см. главу XIII):

$$I_{xy} = \frac{1}{5} mc^2; \quad I_z = C = \frac{2}{5} ma^2;$$

$$I_{xy} - \frac{1}{2} I_z = \frac{1}{5} m(c^2 - a^2).$$

Для вытянутого эллипсоида  $c > a$  и сила  $F$  больше нормальной, выраженной первым членом нашей формулы. Это означает, что точка приложения равнодействующей находится ближе к центру  $S$ , чем центр  $O$ . Для сплюснутого эллипсоида, напротив того,  $c < a$ , и точка приложения равнодействующей будет расположена дальше от центра притяжения, чем центр инерции  $O$ .

Полученный нами результат можно себе уяснить очень наглядно следующим образом. Проведем через центр инерции тела  $O$  сферическую поверхность с центром в  $S$ . На всей этой поверхности напряжение поля будет равно

$$g = \frac{km_0}{p^2}.$$

Внутри поверхности (ближе к центру притяжения) поле будет сильнее, тогда как снаружи этой поверхности поле будет слабее. Если тело вытянуто по направлению  $OS$  (рис. 19), то многие его точки будут находиться в поле настолько сильном, что притяжение тела будет больше нормального (рассчитанного по расстоянию  $OS$  между центрами). Наоборот, если

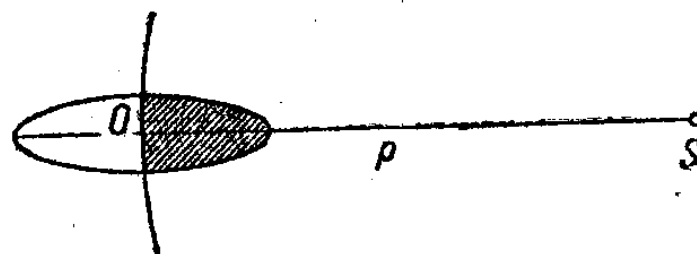


Рис. 19. Притяжение вытянутого эллипсоида.

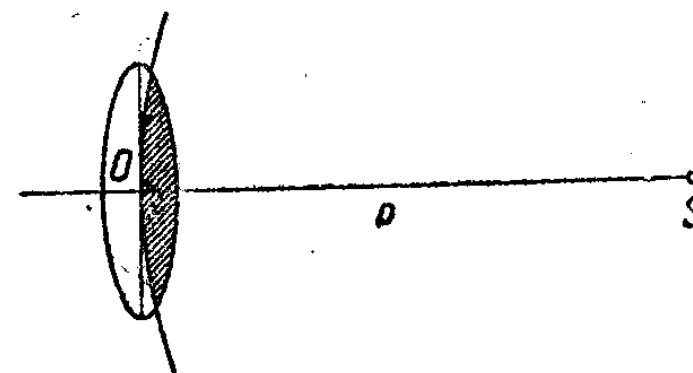


Рис. 20. Притяжение сплюснутого эллипсоида.

тело сплюснуто (рис. 20), то большая часть его будет в более слабом поле и равнодействующая будет меньше нормальной. Для шара и вообще для тел, для которых  $I_{xy} = \frac{1}{2} I_z$ , притяжение будет нормально, как будто вся масса тела сосредоточена в его центре инерции.

На основании принципа равенства действия и противодействия мы можем рассчитанную нами равнодействующую  $F$  считать приложенной и к точке  $S$ , только, конечно, в противоположном направлении. Таким путем мы можем рассчитать поле тяготения, образуемое телом  $m_0$ ; это тело может быть любой формы и любого распределения масс; однако, эти расчеты будут только приблизительные и могут иметь значение только для точек пространства, далеко отстоящих от тела.

38. Момент сил, действующих на тело в центральном поле. При некотором расположении масс в теле, помещенном в центральном поле тяготения, может образоваться момент сил, стремящийся повернуть тело.

Для того чтобы показать это, составим момент элементарной силы, приложенной к какой-либо точке  $P$  (рис. 21) тела вокруг центра инерции тела  $O$ :

$$dM \quad |r dF| \quad \frac{m_0 k}{p^2} \left| 1 - 3 \left( \frac{r}{p} \right) \cos \delta \right| \left| r \left( p_1 - \frac{r}{p} \right) \right| dm.$$

При разложении в ряд величины  $q^2$  мы ограничились первыми степенями отношения  $\frac{r}{p}$ , потому что при умножении на  $[gr_1]$  мы уже получим члены со вторыми степенями  $\frac{r}{p}$ . Далее, мы можем принять во внимание, что  $[gr] = 0$  и что при интегрировании по всему объему тела

$$\int [gr_1] \cdot dm = 0.$$

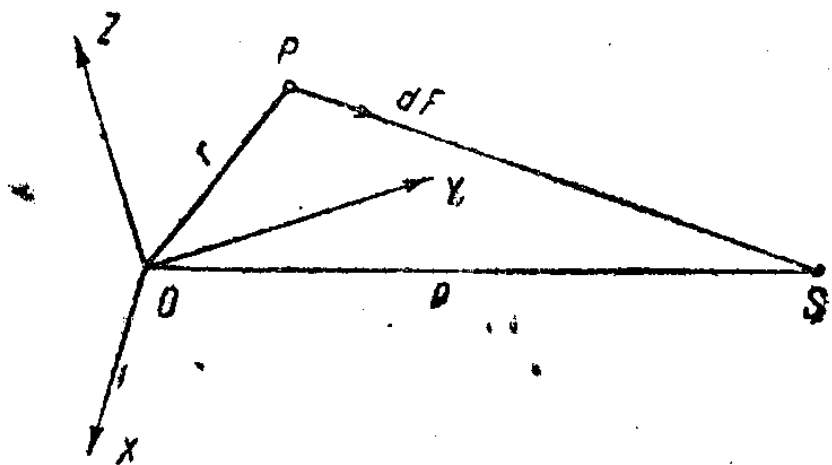


Рис. 21. Вычисление момента сил.

Действительно, этот член представляет собой момент сил в однородном поле, напряжении которого равно напряжению центрального поля в центре инерции тела, а мы знаем, что в однородном поле не образуется моментов. Впрочем, мы можем убедиться в справедливости этого еще следующим образом.

Поместим в рассматриваемое тело систему декартовых координат с началом в центре  $O$  инерции тела (рис. 21); оси же координат направим по *главным* осям инерции тела. Пусть направление  $OS$  образует с этими осями углы, косинусы которых равны соответственно  $\alpha, \beta, \gamma$ . Тогда вектор  $[gr_1]$  будет иметь проекциями:

$$\begin{aligned} r_{1x} &= \alpha; & [gr_1]_x &= y\gamma - z\beta; \\ r_{1y} &= \beta; & [gr_1]_y &= za - x\gamma; \\ r_{1z} &= \gamma; & [gr_1]_z &= x\beta - ya. \end{aligned}$$

При вычислении проекций момента  $M$  на оси координат нам придется интегрировать по всему объему тела выражения

$$\int x \cdot dm = 0; \quad \int y \cdot dm = 0; \quad \int z \cdot dm = 0,$$

которые, как мы знаем, все равны нулю, если начало координат помещено в центре инерции тела, как это у нас и сделано.

Итак, для вычисления момента сил у нас остается выражение:

$$dM = 3 \frac{km_0}{p^3} (r \cos \delta) [gr_1] \cdot dm,$$

в котором мы можем положить

$$(r \cos \delta) = (gr_1) = x\alpha + y\beta + z\gamma.$$

Составим выражение для проекции момента сил на ось  $OX$ :

$$M_x = 3 \frac{km_0}{p^3} \int [xy \cdot \alpha\gamma + y^2 \cdot \beta\gamma + yz \cdot \gamma^2 - zx \cdot \alpha\beta - yz \cdot \beta^2 - z^2] \cdot \beta\gamma \cdot dm.$$

Так как косинусы  $\alpha, \beta, \gamma$  (углов наклона линии  $OS$  к осям координат) от положения точки  $P$  в теле не зависят, то эти величины могут быть вынесены за знак интеграла, и тогда под интегралами у нас оста-

нутся произведения  $xу, уz, zx$ , которые дадут при интегрировании произведения инерции тела (ч. II, 275, 184; стр. 18, 12) и величины  $x^2, y^2, z^2$ . Но все произведения инерции при осях, направленных по *главным* осям инерции тела, равны нулю, и у нас остается:

$$M_x = 3 \frac{km_0}{p^3} \beta\gamma \int (y^2 - z^2) \cdot dm.$$

Если мы сравним стоящий здесь интеграл с формулами стр. 18, 12 для моментов инерции тела  $A, B, C$  вокруг осей  $OX, OY, OZ$ , то заметим, что интеграл этот равен разности двух моментов инерции ( $C - B$ ).

Аналогичные формулы мы получим для проекции момента сил и на другие оси координат, а потому мы можем написать их и без вычислений, а именно:

$$\begin{aligned} M_x &= 3 \frac{km_0}{p^3} (C - B) \cdot \beta\gamma; \\ M_y &= 3 \frac{km_0}{p^3} (A - C) \cdot \gamma\alpha; \\ M_z &= 3 \frac{km_0}{p^3} (C - A) \cdot \alpha\beta. \end{aligned}$$

Заметим, что все эти формулы остаются в силе, независимо от формы тела; тела различной формы, но одинаковых моментов инерции, будут испытывать в центральном поле одинаковые моменты сил.

В частном случае, когда тело имеет ось симметрии, так что два главных момента инерции тела одинаковы, то проекция момента сил на ось симметрии будет равна нулю. Так, например, если  $A = B$ , то  $M_x = 0$ . Такой случай мы имеем при действии Солнца на Землю. Форму Земли можно принять за эллипсоид вращения вокруг полярной оси Земли, и следовательно, момент сил тяготения Земли к Солнцу не имеет составляющей вдоль полярной оси Земли; остаются только составляющие момента, лежащие в плоскости экватора. Действие этих моментов мы разберем в гл. VIII.

Если одна из главных осей инерции тела направлена по линии  $OS$ , то из трех косинусов  $\alpha, \beta, \gamma$  два будут равны нулю, и следовательно, все проекции момента  $M$  и самый момент сил  $M$  пропадают.

Если мы сопоставим результаты, полученные в этом параграфе, с результатами предыдущего параграфа, то действие отдаленного центра притяжения на материальное тело любой формы можно считать составленным:

1) из силы обратно пропорциональной *квадрату* расстояния между центрами  $O$  и  $S$ , аналогичной взаимодействию между двумя материальными точками или двумя однородными шарами.

2) из добавочной силы, обратно пропорциональной *четвертой* степени расстояния, величина и точка приложения которой зависят от положения главных осей инерции тела относительно поля тяготения.

3) из момента сил, величина которого обратно пропорциональна *третьей* степени расстояния; величина и направление момента сил зависят от расположения главных осей инерции тела относительно поля сил.

39. Основные уравнения равновесия. Если твердое тело находится в покое, несмотря на то, что на него действуют *внешние силы*, то говорят, что тело находится в *равновесии*; но можно также сказать, что силы, действующие на тело, находятся в равновесии. Из этого определения непосредственно следует, что мы можем получить уравнение равновесия, если в уравнениях движения твердого тела положим все ускорения и скорости (включая сюда и начальные скорости) равными нулю. Мы получили выше два уравнения для *свободного* твердого тела — уравнение импульса и уравнение моментов:

$$\dot{P}_c = \sum F; \quad \dot{K} = \sum M.$$

Положив в них ускорения равными нулю, получаем два уравнения для равновесия твердого тела:

$$\sum F = 0; \quad \sum M = 0.$$

Те же уравнения мы могли бы получить и независимо от уравнений движения, исходя из принципа виртуальной работы, и притом следующим образом.

Представим себе, что сила  $F_p$ , приложенная к какой-либо точке  $P$  твердого тела, передвигает эту точку на некоторое расстояние  $\delta s_p$ . Элементарная работа этой силы будет равна:

$$(F_p \delta s_p).$$

Но для абсолютно твердого тела величина смещения любой его точки  $P$  может быть выражена через смещение  $\delta s_0$ , одной какой-либо точки  $O$  тела и через элементарный угол поворота тела  $\delta \alpha$  (это есть вектор) вокруг оси, проходящей через эту точку (ср. 8, 3):

$$\delta s_p = \delta s_0 + [\delta \alpha r],$$

где  $r$  означает расстояние рассматриваемой точки  $P$  от основной точки  $O$ . Если мы подставим это выражение в формулу работы силы  $F_p$  и просуммируем работу всех сил, приложенных к телу, то получим:

$$\delta u = \sum F_p \delta s_0 + \sum F_p [\delta \alpha r].$$

В первом члене этой суммы мы можем общий для всех точек множитель  $\delta s_0$  вынести за знак суммы, а геометрическую сумму всех сил заметить их равнодействующей  $F$ . Тогда получим:

$$(F \delta s_0),$$

Во втором члене мы можем переставить множители:

$$\sum F_p [\delta \alpha r] = \sum \delta \alpha [r F_p],$$

и общий для всех точек тела множитель  $\delta \alpha$  вынести за знак суммы; при этом сумму моментов всех сил мы можем заменить одним равнодействующим моментом, написав

$$(M \delta \alpha).$$

Таким образом элементарная работа всех сил, действующих на тело, выразится формулой:

$$\delta U = (F \delta s_0) + (M \delta \alpha).$$

На основании принципа виртуальной работы (ч. II, стр. 218, 143) в случае равновесия эта величина должна равняться нулю. Если рассматриваемое нами твердое тело свободно и его движения не ограничены никакими добавочными условиями (связями), то величины  $\delta s_0$  и  $\delta \alpha$  совершенно произвольны и независимы друг от друга, и уравнение виртуальной работы распадается на два независимых друг от друга уравнения, из которых следует, что

$$\sum F_p = F = 0; \quad \sum [r F_p] = M = 0.$$

Этот результат совпадает с тем, что мы получили из уравнений движения (которые были составлены нами тоже для случая *свободного* тела); однако теперь выступает яснее следующее важное обстоятельство. Так как точка  $O$ , вокруг которой мы составляли моменты сил, была нами выбрана совершенно произвольно, то при составлении уравнения моментов мы можем выбирать такую точку, которая нам наиболее удобна для дальнейших вычислений. При составлении уравнений движения мы должны были составлять моменты или относительно *центра инерции* тела, или относительно какой-либо *неподвижной* точки пространства; в противном случае уравнение моментов осложняется прибавкой члена, зависящего от скорости движения выбранной нами основной точки (ср. ч. II, стр. 290, 200).

При равновесии скорости всех точек тела равны нулю, и мы можем взять *любую* его точку  $O$  за основную для составления моментов сил без осложнений в уравнениях.

Итак, для равновесия твердого тела необходимо и достаточно, чтобы геометрическая сумма всех сил, действующих на тело (*равнодействующая сил*) равнялась нулю и чтобы геометрическая сумма всех моментов этих сил вокруг любой точки тела (*равнодействующая пара сил*) равнялась нулю.

Если мы отнесем написанные нами два векторных уравнения к какому-либо неподвижному, например, декартовым координатам, то получим *шесть* скалярных уравнений:

$$F_x = 0; \quad F_y = 0; \quad F_z = 0; \\ M_x = 0; \quad M_y = 0; \quad M_z = 0;$$

в соответствии с *шестью* степенями свободы твердого тела.



Многочисленные примеры равновесия твердых тел приводятся в элементарных курсах физики и механики, а потому мы ограничимся здесь только несколькими *типичными* примерами.

40. Рычажные весы. Большое практическое и научное значение имеют условия равновесия рычажных весов. На рис. 22 изображена схема подобных весов. Как известно, к коромыслу весов прикреплены три стальные призмы (советуем читателю рассмотреть устройство весов в натуре): средняя призма обращена ребром *книзу* и положена на гладкий горизонтальный столик, стоящий на неподвижной колонке  $V$ . Ребро этой призмы, перпендикулярное к рис. 22, обозначенное на нашей схеме буквой  $O$ , служит осью, вокруг которой коромысло весов может свободно поворачиваться. Другие две призмы, ребра которых обозначены на нашей схеме буквами  $A$  и  $B$ , прикреплены к коромыслу ребрами *кверху*; на этих ребрах подвешены чашки весов. Цель применения подобных призм заключается в том, чтобы достичь свободы качаний коромысла и чашек, устранив, насколько это возможно, влияние *трения*. Сила трения, при соприкосновении твердых тел друг с другом, часто зависит от случайных причин, и влияние

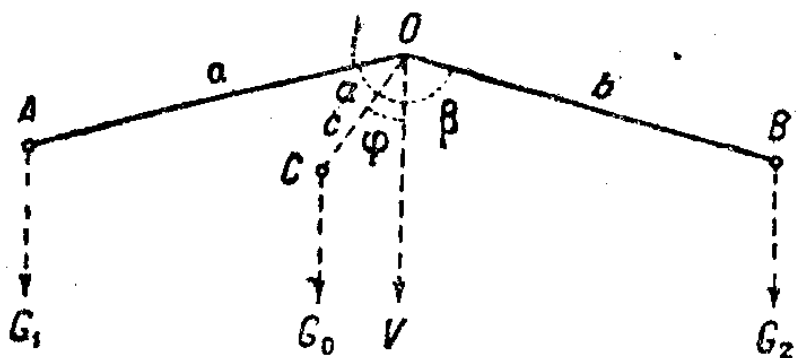


Рис. 22. Схема рычажных весов.

ее на равновесие весов крайне нежелательно, в особенности при точных взвешиваниях. Расстояния  $OA = a$  и  $OB = b$  между ребрами призмы будем называть *плечами весов*. Для большей общности мы будем предполагать, что точки  $A, O, B$  не лежат в точности на одной прямой линии, как это и бывает в действительности. Буквой  $C$  у нас обозначено положение центра тяжести коромысла; углы, образуемые линией центра тяжести  $OC$  с коромыслами весов  $OA$  и  $OB$ , мы обозначим через  $\alpha$  и  $\beta$ , а угол, образуемый линией  $OC = c$  с вертикалью, обозначим через  $\varphi$  (рис. 22).

К коромыслу весов приложены четыре силы: вес двух чашек  $G_1$  и  $G_2$ , вес коромысла  $G_0$  и реакция столика у ребра призмы  $Q$ . Первые три силы направлены вертикально вниз, тогда как последняя сила (реакция) направлена вертикально вверх. Условие равновесия требует, чтобы

$$G_1 + G_2 + G_0 = Q.$$

Материал призмы и столика, на котором лежит призма  $O$  должен быть выбран настолько твердыми (сталь, агат), чтобы при максимальной нагрузке весов они выдерживали силу  $Q$ , по возможности не сминаясь.

Теперь составим уравнение моментов всех сил вокруг ребра призмы  $O$ ; при этом момент силы реакции  $Q$  будет равен нулю и в уравнение не войдет (см. рис. 22):

$$G_1 a \cdot \sin(\alpha + \varphi) - G_2 b \cdot \sin(\beta - \varphi) + G_0 c \cdot \sin \varphi = 0.$$

Положим на обе чашки весов по одинаковому грузу  $q$ ; от этого положение равновесия весов не должно измениться, и мы должны получить

опять тот же самый угол  $\varphi$ , как и без этих грузов. Но теперь уравнение моментов будет:

$$(G_1 + q) a \cdot \sin(\alpha + \varphi) - (G_2 + q) b \cdot \sin(\beta - \varphi) + G_0 c \cdot \sin \varphi = 0.$$

Оба составленные нами уравнения могут быть удовлетворены при одном и том же значении  $\varphi$ , если будет соблюдено условие:

$$a \cdot \sin(\alpha + \varphi) = b \cdot \sin(\beta - \varphi).$$

Однако, если даже это условие и было бы соблюдено, то мы получили бы уравнение моментов в таком виде:

$$(G_1 - G_2) a \cdot \sin(\alpha + \varphi) + G_0 c \cdot \sin \varphi = 0,$$

из которого видно, что положение равновесия, т. е. угол  $\varphi$ , зависело бы от веса чашек и веса коромысла. Но обычно делают обе чашки одинакового веса (это можно сделать с большой точностью), а в таком случае, при  $G_1 = G_2$  мы получаем  $\varphi = 0$ . Это означает, что весы будут находиться в положении равновесия, когда центр тяжести коромысла  $C$  придется *вертикально* под осью качания весов  $O$ . Этого следовало и ожидать, потому что при таком положении вес коромысла не может образовать момента вокруг оси и, следовательно, не может оказывать влияния на положение равновесия весов.

Если положение равновесия весов получается при  $\varphi = 0$ , то выше-написанное условие, которое необходимо для независимости угла  $\varphi$  от нагрузки чашек  $q$ , упрощается, а именно:

$$a \cdot \sin \alpha = b \cdot \sin \beta.$$

Эти выражения представляют собою не что иное, как проекции плеч коромысла на горизонтальную (при  $\varphi = 0$ ) линию, и они равны, следовательно, так называемым *плечам сил* (которые вертикальны), приложенных к призмам  $A$  и  $B$ . Но если плечи одинаковы, то, понятно само собой, что и моменты при равных силах всегда будут одинаковы и равновесие не нарушится как бы мы ни изменяли одинаковую нагрузку  $q$  чашек; этого мы и желали достичь.

41. Чувствительность весов. Теперь будем испытывать весы в другом отношении. Положим на *правую* чашку весов небольшой перевесок  $q$ ; этот перевесок произведет небольшое отклонение весов, которое мы обозначим через  $\varphi$ . Положение равновесия при таком перевесеке определится из уравнения моментов:

$$G_1 a \cdot \sin(\alpha + \varphi) - (G_2 + q) b \cdot \sin(\beta - \varphi) + G_0 c \sin \varphi = 0.$$

Если бы мы положили тот же перевесок  $q$  на левую чашку весов, то положение равновесия (т. е. угол  $\varphi$ ) определилось бы из такого уравнения моментов:

$$(G_1 + q) a \cdot \sin(\alpha - \varphi) - G_2 b \cdot \sin(\beta + \varphi) - G_0 c \sin \varphi = 0.$$

Вообще говоря, угол  $\varphi$ , определяемый первым и вторым уравнением, может оказаться различным. Однако для взвешивания это неудобно во многих отношениях, и желательно, чтобы величина отклонения весов была

независима от того, на которую из двух чашек мы кладем перевесок  $q$ . Другими словами, желательно, чтобы чувствительность весов была в обе стороны одинакова. Какова же должна быть конструкция весов, чтобы удовлетворить этому условию? Для решения этого вопроса сопоставим оба вышенаписанных уравнения моментов, приняв в них значение  $\varphi$  одинаковым. Кроме того, мы предположим, что условия, полученные нами в предыдущем параграфе, а именно:

$$G_1 = G_2 = G; \quad a \cdot \sin \alpha = b \cdot \sin \beta,$$

уже соблюдены. Раскрыв скобки и сложив оба уравнения вместе (приняв во внимание и только-что написанные соотношения), получаем:

$$a \cdot \cos \alpha = b \cdot \cos \beta.$$

Мы можем достичь и этого условия, если сделаем коромысло весов по возможности *симметричным*, а именно: сделаем оба плеча весов одинаковыми  $a = b$  и постараемся достигнуть одинаковости углов  $\alpha$  и  $\beta$ . Чем лучше нам удастся достигнуть указанной симметрии, тем меньше будет отклонение весов зависеть от того, на какую чашку мы положили перевесок  $q$ .

Предположим, что весы наши удовлетворяют всем вышеуказанным условиям, и определим величину отклонения  $\varphi$  при данном перевесеке  $q$ . С этой целью вычтем одно уравнение моментов из другого и примем во внимание все написанные здесь условия. У нас получится:

$$4Ga \cos \alpha \cdot \sin \varphi - 2qa \cdot \sin \alpha \cdot \cos \varphi + 2qa \cos \alpha \cdot \sin \varphi + 2G_0 c \cdot \sin \varphi = 0,$$

или:

$$(2Ga \cdot \cos \alpha + G_0 \cdot c + qa \cdot \cos \alpha) \sin \varphi = qa \cdot \sin \alpha \cdot \cos \varphi,$$

откуда следует, что

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2qa \cdot \sin \alpha}{G_0 c + (2G + q)a \cdot \cos \alpha}.$$

На практике отклонения весов при небольших перевесах (которые кладутся нарочно для определения чувствительности весов при точных взвешиваниях), бывают настолько малы, что можно положить

$$\operatorname{tg} \varphi = \varphi,$$

и тогда чувствительность весов  $s$ , т. е. отношение отклонения  $\varphi$  к перевесу  $q$ , определяется формулой:

$$s = \frac{\varphi}{q} = \frac{a \cdot \sin \alpha}{G_0 c + (2G + q)a \cdot \cos \alpha}.$$

Если  $\alpha = \beta = 90^\circ$ , т. е. если все три призмы весов расположены на одной прямой линии, то

$$s = \frac{\varphi}{q} = \frac{a}{G_0 c}.$$

Как видим, при таких условиях вес чашек совсем не влияет на чувствительность весов. На практике стараются достичь и этого последнего

условия; однако не нужно упускать из виду, что при нагрузке чашек коромысло немного сгибается и если даже  $\alpha = 90^\circ$  при одной нагрузке, то при других грузах  $\alpha$  уже не будет равно  $90^\circ$ . В некоторых случаях делают  $\alpha > 90^\circ$  для того, чтобы при наиболее часто встречающейся нагрузке, после прогиба коромысла,  $\alpha = 90^\circ$ , призмы чашек делают так, чтобы их положение можно было регулировать. Но, конечно, все эти способы применяются только в весах, предназначенных для особо точных взвешиваний; притом и само взвешивание ведется так, чтобы даже малейшие несовершенства в конструкции не влияли на точность результатов.

Заметим, что из формулы

$$s = \frac{a}{G_0 c}$$

следует, что чувствительность весов тем больше, чем меньше  $c$ , т. е. чем ближе центр тяжести коромысла  $c$  к точке опоры  $O$ , и чем плечи коромысла  $a$  *длиннее*. Тем не менее на практике при точных взвешиваниях предпочитают весы с *короткими* коромыслами. Причиной этого служит то обстоятельство, что точное взвешивание производится не непосредственным наблюдением *положения* равновесия весов, которое в хороших весах наступает только после очень продолжительных качаний, а наблюдением *самых качаний*; а для того, чтобы сделать период качаний малым, необходимо (как увидим в следующей главе) делать плечи коромысла короче. Прогрывая, таким образом, в чувствительности весов, мы зато выигрываем в быстроте взвешивания, что бывает часто более необходимым для получения точных результатов.

42. Балка на двух опорах. Дана балка (или мост), лежащая на двух опорах  $A$  и  $B$  (рис. 23), на балке лежит груз  $P$ , расстояния которого от опор мы обозначим через  $a$  и  $b$ . Сумма

$$a + b = l$$

равна расстоянию между опорами. Это — так называемый „пролет“ балки. Для определения реакций опор  $R_a$  и  $R_b$  напишем первое уравнение равновесия:

$$-R_a + P - R_b = 0,$$

и прибавим к нему уравнение моментов, которое мы можем составлять вокруг любой оси (в данном случае — вокруг любой *точки* плоскости сил  $R$  и  $P$ ). Выберем для составления моментов ось, проходящую через правую опору  $B$ ; тогда реакция этой опоры не войдет в уравнение:

$$R_a (a + b) - Pb = 0.$$

Из этого уравнения непосредственно определяется реакция опоры  $A$ , а затем из первого уравнения определяется реакция опоры  $B$ :

$$R_a = \frac{b}{l} P; \quad R_b = \frac{a}{l} P.$$

Если бы мы составили уравнение моментов вокруг оси  $A$  или оси  $C$ , то получили бы:

$$-R_b(a+b) + Pa = 0;$$

$$R_a a - R_b b = 0.$$

Любые два из написанных уравнений могут служить для решения задачи. Кроме реакций опор (внешние силы), обыкновенно интересуются

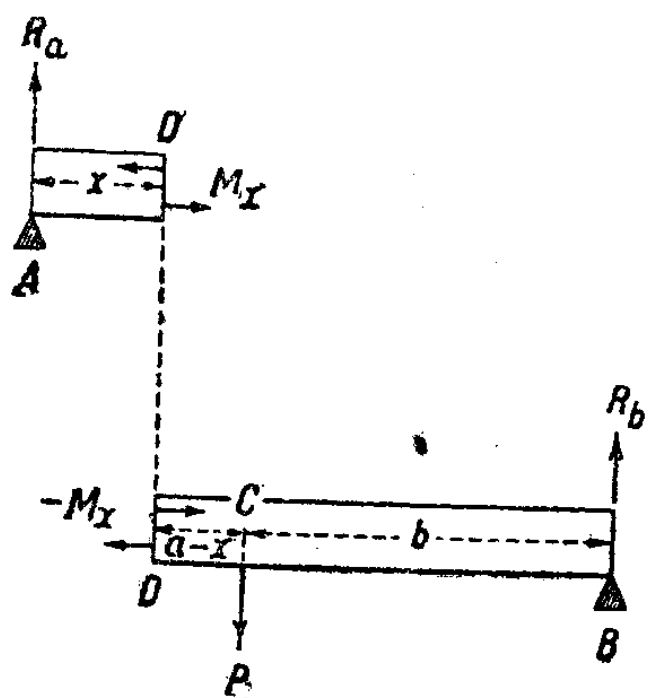
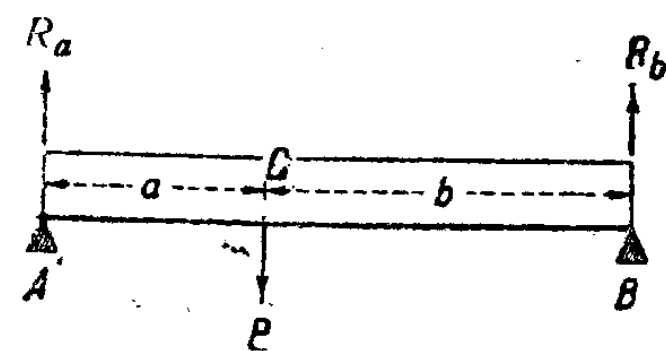


Рис. 23, 24, 25.  
Балка на двух опорах.

также и *внутренними* силами, действующими в каждом сечении балки и сопротивляющимися изгибу или излому балки. Но внутренние силы всегда действуют попарно, причем в каждой паре силы равны и противоположны, а потому на равновесие тела, рассматриваемое как нечто целое, они никакого влияния оказывать не могут и в наши уравнения равновесия они не входят, и определить их из этих уравнений нельзя. Но можно обойти это затруднение следующим искусственным приемом. Представим себе, что балка отрезана в расстоянии  $x$  от левой опоры  $A$  (рис. 24) и вся правая часть балки удалена. Для того чтобы оставшаяся левая часть балки тем не менее оставалась в равновесии, необходимо, чтобы в сечении  $D$  действовал некоторый момент сил  $M_x$  (некоторая пара сил), уравновешивающий момент оставшихся сил вокруг точки этого сечения, и мы можем написать:

$$R_a x = M_x.$$

Как видим, указанный нами искусственный прием состоит в том, что мысленно удаляют часть твердого тела, находящегося в равновесии, и таким образом превращают некоторые из прежних внутренних сил в силы внешние по отношению к оставшейся части тела.

Определенный таким образом момент  $M_x$  будет представлять момент внутренних сил, действующих в том сечении балки, где мы произвели разрез. Что касается до распределения самих сил по сечению, то он не может быть определен здесь: для этого необходимо прибегнуть к теории упругости.

Если бы мы, отсекая балку в точке  $D$ , представили себе удаленной не ее правую часть, а левую (рис. 25), то получили бы уравнение моментов внутренних сил сечения:

$$M_x = P(a-x) - R_b(l-x) = -M_x.$$

Нетрудно видеть, что оба полученных нами момента, действующих в сечении балки, равны и противоположны (предоставляем читателю самому проверить это), как это и должно быть (внутренние моменты упругих сил всегда действуют попарно).

Совершенно таким же образом мы могли бы определить внутренние моменты упругих сил и в других сечениях балки.

**43. Линия моментов внутренних сил.** Если мы таким образом вычислим моменты сил для различных сечений балки и отложим их величины в подходящем масштабе на рисунке над соответствующим сечением балки, то мы получим некоторую линию, позволяющую судить о том, как распределены моменты сил упругости в различных сечениях балки. В рассмотренном нами в предыдущем параграфе случае, когда нагрузка балки состоит из одного груза  $P$ , мы получаем для линии моментов два уравнения: для сечений слева от груза  $M_x = R_a x$ ; для сечений справа от груза  $M_x = R_a x - P(x-a)$ .

Следовательно, в данном случае линия моментов будет состоять из двух прямых линий, пересекающихся над грузом (рис. 26). На опорах, если балка лежит на них свободно и не заделана в стены, момент должен быть равным нулю. Если бы мы положили на балку несколько грузов на различных расстояниях от опор, то для моментов  $M_x$  получили бы ломаную линию с изломом над каждым грузом. Предлагаем читателю самому разобрать какой-либо случай распределения нагрузки.

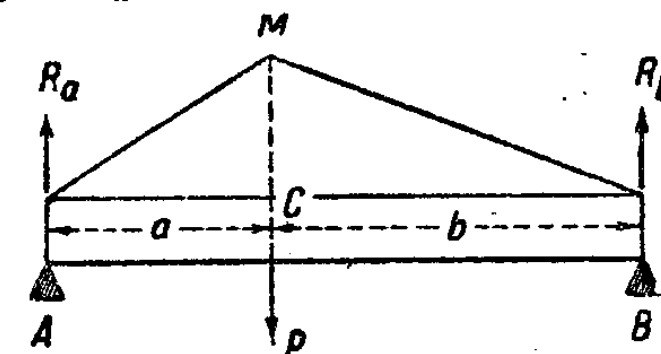


Рис. 26. Линия моментов при сосредоточенном грузе.

Для выбора балки достаточной прочности или для проверки прочности уже выбранной балки очень важно знать, где действуют *максимальные* моменты и какова их величина. В рассмотренном нами примере наибольший момент будет под грузом  $P$ , и величина этого момента будет равна ( $x=a$ ):

$$M_{max} = R_a a = \frac{ab}{l} P.$$

Наконец, в случае *подвижной* нагрузки (например, при движении поезда по мосту) необходимо знать, как изменяются моменты сил в различных сечениях балки при различных положениях груза на балке во время его движения. Размеры сечения балки рассчитываются, конечно, по *наибольшей* возможной нагрузке, и притом при таком положении этой нагрузки, которое образует *наибольшие моменты*.

В рассмотренном нами простом примере нагрузки, состоящей из одного груза  $P$ , нетрудно определить наибольший возможный момент сил при движении груза вдоль балки. Мы уже выяснили, что наибольший момент всегда получается в сечении под самим грузом и величина этого момента равна:

$$M = \frac{ab}{l} P = \frac{a(l-a)}{l} P.$$

Остается теперь определить такое значение  $a$  (положение груза), при котором эта величина имеет максимальное значение. На основании общих правил определения максимума имеем:

$$\frac{\partial M}{\partial a} = \frac{P}{l}(l - 2a) = 0; \quad a = \frac{1}{2}l.$$

Следовательно, наибольший момент мы получаем, когда груз находится посредине балки, и величина этого наибольшего момента равна:

$$M = \frac{1}{4}Pl.$$

По этой величине момента и рассчитывается сечение балки. Аналогично ведется расчет и в других случаях, когда число подвижных грузов на балке более одного (движущийся поезд).

44. **Сплошная нагрузка.** Разберем еще случай, когда нагрузка на балке состоит не из отдельных грузов, а распределена *сплошным* образом. В таких случаях полезно ввести понятие о плотности нагрузки  $p$ ; эта величина показывает нам величину нагрузки, отнесенной к единице длины (см) балки вблизи рассматриваемого сечения балки. Следовательно, если мы возьмем у этого сечения длину  $dx$ , то получим груз  $p \cdot dx$ . Величина  $p$  для различных сечений может быть различна; если же нагрузка равномерно распределена по балке, то величина  $p$  для всей балки одна и та же, и полная нагрузка балки будет равна  $pl$ .

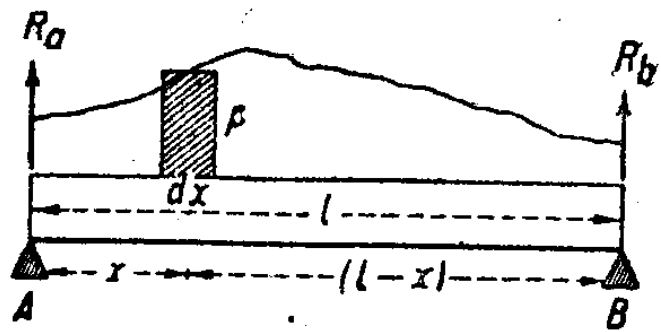


Рис. 27. Сплошная нагрузка.

На рис. 27 графически изображен более общий случай, когда плотность нагрузки над различными точками балки различна. Полная нагрузка балки определится формулой:

$$P = \int_0^l p \cdot dx = R_a + R_b.$$

Эта величина должна равняться сумме реакций обеих опор. Однако для определения этих реакций необходимо прибегнуть к уравнению моментов, которое можно написать следующим образом. Сила, действующая на элемент длины балки  $dx$ , равна  $p \cdot dx$ , и если рассматриваемое нами сечение отстоит от левой опоры на расстоянии  $x$ , то момент этой силы вокруг опоры  $A$  или опоры  $B$  будет равен соответственно:

$$px \cdot dx; \quad p(l - x) \cdot dx.$$

Момент всей нагрузки вокруг этих опор будет выражаться формулами:

$$M_a = \int_0^l p \cdot x \cdot dx; \quad M_b = - \int_0^l p(l - x) \cdot dx.$$

Пользуясь этими формулами, мы можем написать уравнение моментов вокруг опоры  $A$  и  $B$  в следующем виде:

$$M_a - R_b l = 0; \quad M_b + R_a l = 0.$$

Отсюда и определяются сопротивления опор.

Совершенно таким же образом определяется момент сил вокруг какого-либо сечения балки, отстоящего от левой опоры на расстоянии  $a$ :

$$M = R_a a - \int_0^a p \cdot (a - x) \cdot dx.$$

Эта формула определяет момент упругих сил, действующих в рассматриваемом сечении. По тем же формулам определяются и моменты подвижной нагрузки.

45. **Равномерная нагрузка.** На практике нагрузка часто бывает распределена равномерно по длине балки; примером такой равномерной нагрузки может служить собственный вес балки, если только балка по всей своей длине имеет *одинаковое* сечение. Для равномерной нагрузки формулы предыдущего параграфа дают:

$$M_a = \frac{1}{2}pl^2; \quad M_b = -\frac{1}{2}pl^2;$$

$$R_a = R_b = \frac{1}{2}pl;$$

$$M = \frac{1}{2}pa(l - a).$$

Линии нагрузки  $P$  и моментов  $M$  (парабола) изображены на рис. 28.

Впрочем этот простой случай равномерной нагрузки можно решить и непосредственно, независимо от общих формул. Так как полная нагрузка балки равна  $pl$ , то сопротивление каждой опоры равно  $\frac{1}{2}pl$ . Момент равномерной нагрузки вокруг какого-либо сечения  $a$  мы можем заменить моментом равнодействующей этой части нагрузки, а равнодействующая будет находиться на середине в точке  $x = \frac{a}{2}$ . Итак, уравнение моментов для сечения  $a$  напишется так:

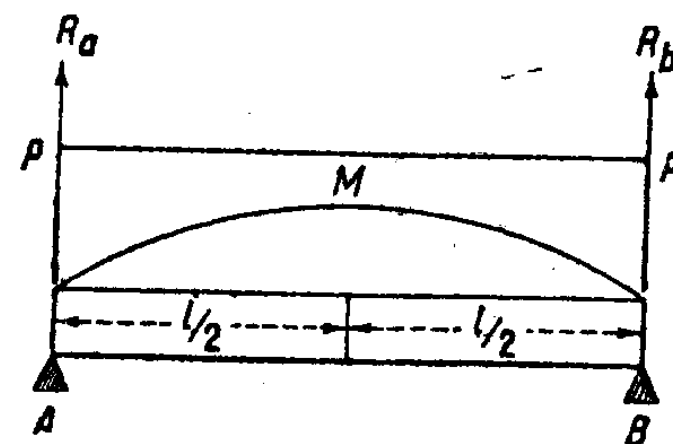


Рис. 28. Равномерная нагрузка.

$$M = \frac{1}{2}pl \cdot a - \frac{1}{2}pa \cdot a = \frac{1}{2}pa(l - a).$$

Нетрудно видеть, что наибольший момент будет приходиться посредине балки при

$$a = \frac{l}{2}$$

и будет равен

$$M_{max} = \frac{1}{8} pl^2 = \frac{1}{8} Pl,$$

где  $P$  означает всю нагрузку балки.

Из сопоставления этой формулы с формулой для сосредоточенного груза

$$M = \frac{1}{4} Pl$$

мы видим, что если распределить этот груз равномерно по всей балке, то наибольший момент вокруг срединного сечения балки делается вдвое меньше. Равномерная нагрузка более благоприятна для прочности балки.

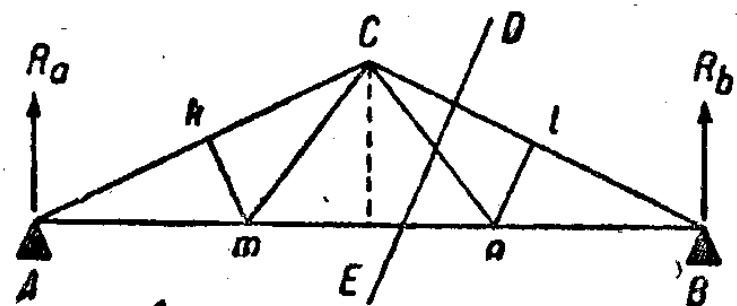


Рис. 29. Ферма.

треугольник, или вообще многоугольник, не может оставаться при любой нагрузке в равновесии, если его стороны скреплены болтами; только треугольник сохраняет свою форму при любой нагрузке; поэтому фермы и состоят из системы треугольников. Фермы употребляются большей частью в железных сооружениях: мостах, стропилах, башнях, кранах и т. п. Расчеты подобных ферм подробно разбираются в специальных руководствах, и мы ограничимся здесь только указанием, каким образом в них применяются уравнения равновесия твердого тела.

Сопrotivления опор определяются совершенно так же, как и в сплошной балке, потому что уравнения равновесия твердого тела не зависят от того, имеются ли в теле пустоты, или оно представляет собой сплошное тело. Для определения сил, действующих на отдельные стержни, составляющие ферму, мы можем применить тот же метод, который мы применяли для определения моментов внутренних сил в сплошной балке. Разрежем мысленно ферму по линии  $DE$  и представим себе правую (или левую) часть фермы удаленной. Обозначим силы, действующие в разрезанных стержнях (рис. 30) через  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $F_3$ . Составим уравнение моментов всех оставшихся сил, причем за ось моментов возьмем линию, перпендикулярную к рис. 30 проходящую через точку  $C$ , в которой пересекаются силы  $F_1$  и  $F_2$ . При таком выборе осн, силы  $F_1$  и  $F_2$  не дадут момента, и у нас в уравнении моментов останется только одно неизвестное  $F_3$ .

$$R_a a - F_3 h = 0.$$

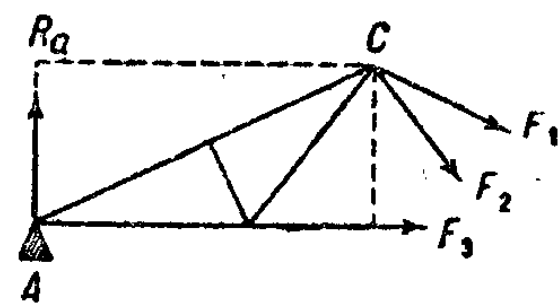


Рис. 30. Определение сил в ферме.

Из этого уравнения и определяется сила, действующая на стержень  $mn$ . Если мы получим для  $F_3$  положительное значение, то это будет означать, что стержень  $mn$  подвержен *растяжению* (ср. рис. 30); в противном случае рассматриваемый стержень подвержен сжатию. Совершенно таким же приемом определяются силы и в других стержнях.

Если нагрузка фермы дана, то в одних стержнях мы получим *растяжение*, тогда как в других стержнях можем получить *сжатие*. Если нагрузка изменяется (подвижная), то в одном и том же стержне усилия могут изменяться и переходить из растяжения в сжатие и наоборот. При проектировании ферм важно знать не только максимально возможное усилие во всех стержнях, но также каково оно, растяжение или сжатие, потому что от этого зависит выбор конструкции самого стержня.

47. Статически неопределимые системы. Мы рассматривали равновесие балки, лежащей на двух опорах, однако очень часто балки, мосты, рельсы лежат на нескольких опорах.

В подобных случаях принципы, положенные в основу механики *твердого тела*, оказываются недостаточными для определения реакции опор, как это мы сей-ас покажем

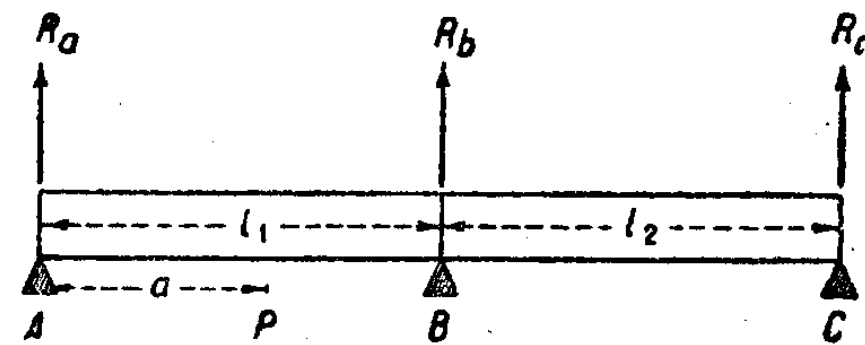


Рис. 31. Балка на трех опорах.

Пусть дана балка на трех опорах  $A$ ,  $B$ ,  $C$  (рис. 31) с двумя пролетами  $l_1$  и  $l_2$ , причем на пролете  $l_1$  помещен груз  $P$  в расстоянии  $a$  от первой опоры  $A$ . Первое условие равновесия напишется так:

$$-R_a + P - R_b - R_c = 0.$$

Что же касается до уравнения моментов, то мы его напишем в трех видах, взяв за оси моментов  $A$ ,  $B$  и  $C$

$$P_a - R_b l_1 - R_c (l_1 + l_2) = 0;$$

$$R_a l_1 - P(l_1 - a) + R_c l_2 = 0;$$

$$R_a (l_1 + l_2) - P(l_1 + l_2 - a) + R_b l_2 = 0.$$

Однако написанные нами уравнения не независимы друг от друга; независимых уравнений мы можем получить только два, а этого недостаточно для определения трех неизвестных  $R_a$ ,  $R_b$ ,  $R_c$ . Таким образом реакции опор оказываются неопределенными. А между тем на самом деле, т. е. в *действительности* опоры оказывают вполне определенные реакции. Очевидно, в написанных нами уравнениях и в принципах, на которых они основаны, чего-то не хватает. Все дело в том, что мы предполагаем и балку и опоры абсолютно твердыми, а между тем на самом деле балка под действием сил сгибается, а опоры более или менее опускаются. Величина сил реакций будет зависеть и от упругих свойств балки и от степени опускания опор. Если бы мы приняли все это во внимание, т. е. прибегли бы к теории упругости, то получили бы третье, недостающее нам уравнение, и величины реакций опор стали бы вполне определенными. Для того чтобы до некоторой степени уяснить себе,

каким образом упругие свойства опор могут влиять на их реакции, нам достаточно рассмотреть два крайних случая.

Представим себе, что опоры  $A$  и  $B$  достаточно твердые, между тем как третья опора сдает при малейшем давлении; в таком случае балка обопрется на опоры  $A$  и  $B$  и третья опора окажется излишней. Уравнения моментов дают (при  $R_c = 0$ ):

$$R_a = \frac{l_1 - a}{l_1} P; \quad R_b = \frac{a}{l_1} P; \quad R_c = 0.$$

Теперь предположим другой крайний случай, когда средняя опора легко сдает, в то время как балка почти не сгибается. В таком случае балка ляжет на две крайних опоры  $A$  и  $C$  и сопротивление опоры  $B$  будет настолько ничтожно, что им можно пренебречь в уравнении равновесия. Тогда мы получим (при  $R_b = 0$ ):

$$R_a = \frac{l_1 + l_2 - a}{l_1 + l_2} P; \quad R_b = 0; \quad R_c = \frac{a}{l_1 + l_2} P.$$

На самом же деле произойдет нечто среднее между этими двумя крайними случаями, и реакции опор будут иметь значения, лежащие между теми крайними значениями, которые мы определили. Чем жестче опора  $B$ , тем больше будет на нее опираться балка и тем больше будет  $R_b$ . Наоборот, чем жестче сама балка и чем мягче опора  $B$ , тем меньше будет  $R_b$ .

Если опоры  $A, B, C$  не лежат на одной прямой (например, столик на трех ножках), то неопределенность пропадает. Предлагаем читателю самому убедиться в этом и выяснить, почему это так. При *четырёх* опорах задача *всегда* будет неопределенна, как бы ни были расположены эти опоры; это ясно уже из того, что положение твердого тела вполне определяется положением *трех* его точек.

Аналогичную неопределенность мы получим при расчете фермы, в которой вставлены добавочные стержни; например, если на рис. 29 прибавить стержень  $kl$ .

Все эти и им подобные случаи называются *статически неопределимыми*.

Слово *статически* здесь указывает на законы равновесия (статику) абсолютно *твердого* тела. Для *упругого* тела прибавляются новые уравнения, и определение неизвестных сил делается вполне возможным.

48. Устойчивость тяжелого твердого тела. Мы видели (стр. 45, 38), что твердое тело, помещенное в поле тяготения, испытывает не только некоторую силу, стремящуюся сообщить ему поступательное движение, но также и момент сил, стремящийся повернуть тело. Поэтому, если мы желаем закрепить тело в неподвижном состоянии, то должны и реакции устроить так, чтобы они образовали силы и моменты сил, равные и противоположные действию поля.

Нам достаточно здесь рассмотреть действие поля на твердые тела небольших размеров и предполагать поле тяготения однородным; тогда моменты сил пропадают и на тело действует только равнодействующая поля, приложенная к его центру инерции (который совпадает с центром сил тяжести). А в таком случае к твердому телу вполне

применимы те правила, к которым мы пришли, изучая равновесие материальной точки (ч. II стр. 219, 144), и мы можем здесь их не повторять.

Остановимся только на следующем примере. Круговой цилиндр (или диск) положен на горизонтальную плоскость. Если центр тяжести цилиндра приходится на его оси (это будет иметь место в тех случаях, когда материал цилиндра симметрично расположен вокруг его оси), то при качении в ту или другую сторону высота центра тяжести над горизонтальной плоскостью будет оставаться неизменной, а следовательно, и потенциальная энергия цилиндра в поле тяготения тоже изменяться не будет. Такое равновесие называется *безразличным*.

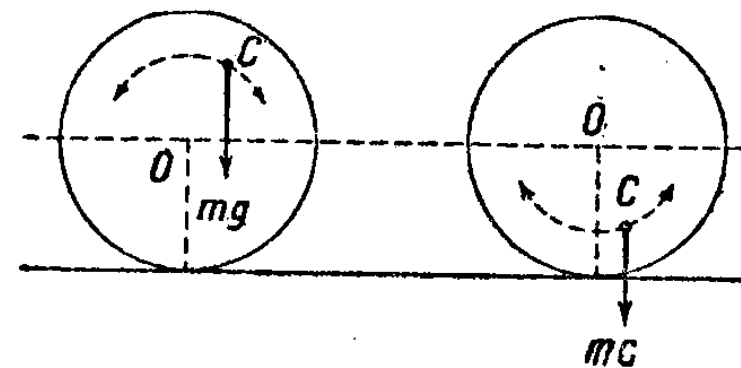


Рис. 32.

Рис. 33.

Цилиндр на плоскости.

Если же центр тяжести цилиндра приходится вне его оси, тогда, вообще говоря, сила тяжести будет образовывать некоторый момент вокруг линии касания цилиндра на плоскости и цилиндр не будет в равновесии. Только в тех случаях когда центр тяжести будет находиться вертикально над линией касания, момент сил будет равен нулю и цилиндр будет в равновесии. Однако тут могут быть два разных случая. Если центр тяжести помещается *выше* оси (рис. 32), то при качении он будет понижаться, потенциальная энергия будет уменьшаться; это положение будет неустойчивым и цилиндр, выведенный из положения равновесия, покатится дальше. Напротив того, если центр тяжести будет находиться *ниже* оси (рис. 33) цилиндра, то при качении в ту или другую сторону он будет повышаться, потенциальная энергия будет увеличиваться. Отсюда заключаем, что потенциальная энергия находилась в минимуме и равновесие было устойчивым. Цилиндр, выведенный из положения равновесия, будет стремиться возвратиться к нему, а предоставленный самому себе, он будет качаться около положения устойчивого равновесия, пока силы трения не поглотят всю энергию качания.

Приведенный пример, несмотря на свою простоту, служит прекрасной иллюстрацией к общим принципам, изложенным нами в ч. II, стр. 219, 144. Кроме того, мы имеем здесь пример, когда центр тяжести находится

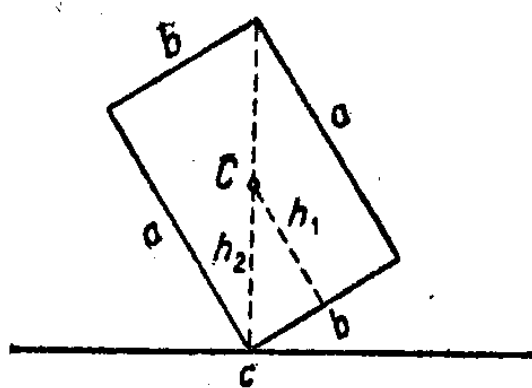


Рис. 34. Призма на плоскости.

над точкой опоры и тем не менее положение оказывается устойчивым. Этому не следует удивляться, так как устойчивость или неустойчивость равновесия не определяется одним положением центра тяжести относительно точки опоры, а необходимо еще знать, каковы условия в положениях, *соседних* с равновесием. Но это вполне соответствует тому, что необходимо знать для определения минимума или максимума потенциальной энергии.

49. Степень устойчивости. В технике принято характеризовать *степень устойчивости* твердого тела величиной той работы, которую нужно затра-

тить, чтобы перевести тело из рассматриваемого устойчивого положения в *ближайшее* неустойчивое положение.

Определим степень устойчивости однородной прямоугольной призмы со сторонами  $a, b, c$  (рис. 34). Центр тяжести этой призмы, очевидно, находится на середине ее высоты  $a$ . Поставленная на горизонтальную плоскость эта призма будет в устойчивом положении. Но если мы наклоним призму, повернув ее вокруг одного из ее ребер, например  $c$ , то на этом ребре она будет в неустойчивом положении. При этом центр тяжести будет находиться над ребром на высоте, определяемой уравнением:

$$\left(h_2\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2; \quad h_2 = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Если мы обозначим вес призмы через  $Q$ , то работа, затраченная на поднятие центра тяжести призмы с высоты  $\frac{a}{2}$  на высоту  $h_2$ , будет равна:

$$U = Q(h_2 - h_1) = \frac{1}{2} Q \left( \sqrt{a^2 + b^2} - a \right).$$

Эта величина и будет характеризовать степень устойчивости призмы на горизонтальной плоскости.

Нетрудно сообразить, что *ближайшего* неустойчивого положения мы достигнем, если будем наклонять призму вокруг *более длинного* ребра  $a$ ; это видно также и из нашей формулы для степени устойчивости.

Для равносторонней призмы, т. е. для однородного куба, мы получим ( $a = b = c$ ):

$$U = \frac{1}{2} Q a \left( \sqrt{2} - 1 \right).$$

Для цилиндра, лежащего на горизонтальной плоскости (рис. 33), при весе его  $Q$  и при расстоянии центра тяжести от оси равной  $a$  мы получаем степень устойчивости:

$$U = 2Qa.$$

**50. Влияние трения.** Во всех предыдущих примерах мы предполагали реакции опор перпендикулярными к плоскости опор, т. е. предполагали, что опоры совершенно гладкие и без трения. Обычно одна из опор моста устраивается на катках для того, чтобы мост мог свободно изменять свою длину под влиянием температуры; при таком устройстве трение ничтожно по сравнению с реакцией. Если же опоры обладают трением, то их реакция уже не будет нормальна к плоскости соприкосновения, и условия равновесия могут измениться.

Самый простой случай мы имеем, когда тело лежит на наклонной плоскости (рис. 35). Разложим вес тела  $Q$  на две составляющие: одну возьмем нормально к плоскости, а другую параллельно плоскости:

$$Q \cdot \cos \alpha; \quad Q \cdot \sin \alpha.$$

Вторая составляющая будет стремиться сдвинуть тело вниз по плоскости, в то время как первая составляющая будет прижимать тело к плоскости; вследствие этого возникнет сила трения, пропорциональная этому давлению:

$$R = f \cdot Q \cdot \cos \alpha.$$

Тело не будет двигаться с места, пока

$$Q \cdot \sin \alpha < f \cdot Q \cdot \cos \alpha$$

т. е. пока

$$\operatorname{tg} \alpha < f.$$

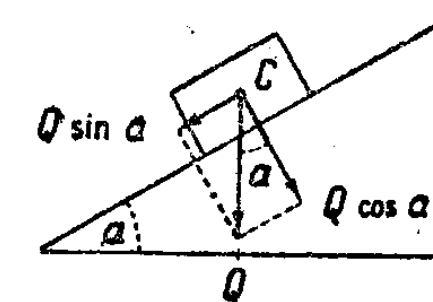


Рис. 35. Призма на наклонной плоскости.

Как видим, условие равновесия совсем не зависит от веса тела, а зависит от угла наклона плоскости  $\alpha$  и от величины коэффициента трения  $f$  тела о плоскость. Если мы постепенно будем увеличивать уклон плоскости до тех пор, пока тело не начнет скользить вниз по плоскости, то получим условие:

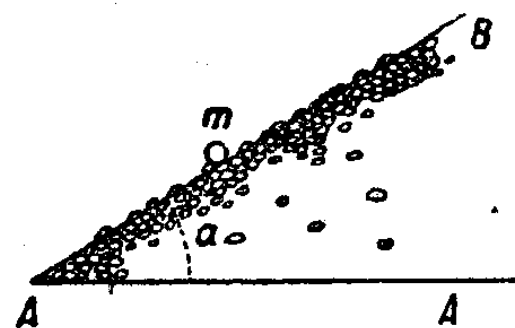
$$\operatorname{tg} \alpha = f.$$

Таким способом можно определить коэффициент трения  $f$  опытным путем. Однако надо иметь в виду, что трение скольжения в *начале* движения всегда несколько больше чем во время движения, а потому указанный способ определения коэффициента  $f$  не может дать точных результатов.

**51. Равновесие сыпучего тела.** Если мы рассмотрим ближе кучку песка, то она нам представится в виде груды песчинок разнообразной формы, лежащих друг на друге в самых разнообразных положениях, подобно грудке камней; отдельные песчинки удерживаются в равновесии частью выступами ниже лежащих песчинок, частью силою трения между песчинками. Таким образом поверхность песка образует выступы и впадины весьма неправильной формы, зависящей от случайного расположения песчинок. Однако, если нас интересует не положение отдельных песчинок, а общая форма, которую принимает сыпучее тело при равновесии, то мы можем заменить действительную неровную поверхность сыпучего тела некоторой *средней* поверхностью и объяснить наклон этой средней поверхности к горизонту *трением* песчинок об эту поверхность. Чем меньше размеры песчинок, тем ближе будет наша предположение к действительности. Такой прием, — замена действительного неоднородного тела некоторым воображаемым однородным телом, — часто применяется в теоретической физике для того, чтобы сделать наблюдаемые явления доступными расчету. Например, в механике мы принимаем твердые, жидкие и газообразные тела за *сплошные*, а между тем мы знаем, что они состоят из молекул, находящихся в движении.

Итак, мы будем принимать сыпучие тела, каковы сухой песок, сухая земля, различного рода зерно насыпанное в мешках или закромах, тоже за *сплошные* тела, отдельные материальные точки которых (в отличие от твердых тел) могут передвигаться друг относительно друга, причем соприкасающиеся частички действуют друг на друга с силой трения, законы которого те же, что и для твердых тел (см. ч. II стр. 50, 35).

Приняв это, нам нетрудно написать условие, которое должно быть соблюдено для того, чтобы какая-либо частица песка (песчинка)  $m$  (рис. 36) могла лежать на поверхности  $AB$  сыпучего тела. Применяя результаты предыдущего параграфа, мы можем написать это условие в виде неравенства:



$$\operatorname{tg} \alpha < f,$$

где  $\alpha$  означает угол, образуемый проведенной нами *средней* поверхностью  $AB$  с горизонтом  $AA$ , а  $f$  — *средний* коэффициент трения песчинок друг о друга. В этот коэффициент уже включено и *действительное* трение песчинок и влияние

Рис. 36. Естественный откос. неоднородности и шероховатости сыпучего тела.

Так как написанное условие имеет силу для *любой* песчинки (любой материальной точки), лежащей на поверхности песка, то оно применимо и к самой поверхности. Итак, поверхность сыпучего тела под действием силы тяжести может принимать различные формы при условии, что

$$\operatorname{tg} \alpha < f.$$

Коэффициент  $f$  можно определить непосредственно из опыта. Если дать песку высыпаться из какого-либо отверстия (как в песочных часах) на горизонтальную плоскость, то образуется *конус* песка, образующие которого наклонены к горизонту под углом  $\alpha_0$ , причем

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = f.$$

Это объясняется просто тем, что все песчинки, образующие случайно углы большие  $\alpha_0$  (вообще говоря) не смогут оставаться на поверхности, а будут скатываться вниз. Так как этот угол  $\alpha_0$  образуется сам собою при всяком рассыпании сыпучего тела, то его называют *углом естественного откоса*. Вот несколько примеров углов естественного откоса:

$$\begin{aligned} \text{сухой песок } \alpha_0 &= 30^\circ \div 35^\circ; & \operatorname{tg} \alpha_0 &= 0,58 \div 0,70, \\ \text{сухая земля } \alpha_0 &= 35^\circ \div 40^\circ; & \operatorname{tg} \alpha_0 &= 0,70 \div 0,84. \end{aligned}$$

Мы можем, следовательно, сказать, что угол естественного откоса  $\alpha_0$  *наибольший* угол, который еще возможен для данного сыпучего тела. Поэтому, когда желают иметь еще больший уклон поверхности в сыпучем теле, то устраивают так называемые подпорные стенки (рис. 37). При расчете прочности и устойчивости подобной подпорной стенки принимают, что вся масса земли, находящаяся выше плоскости естественного откоса (или  $ABD$  на рис. 37), не может держаться сама, а должна удерживаться стенкой. Подпорная стенка должна быть рассчитана, во-первых, на прочность самого материала стенки, затем на сопротивление сдвигу по направлению  $AF$  и, наконец, на сопротивление опрокидыванию (момент сил вокруг ребра стенки  $E$ ). При подобных расчетах можно

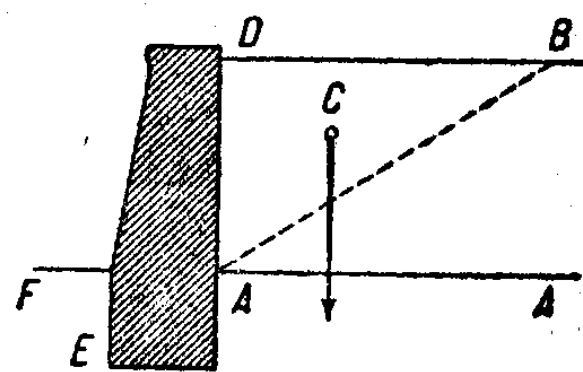


Рис. 37. Подпорная стенка.

также принять во внимание, что опрокидыванию сопротивляется не только момент веса самой стенки вокруг ребра  $E$ , но также и трение между внутренней поверхностью стенки  $AD$  и сыпучим телом. Подробности этих расчетов можно найти в специальной технической литературе.

Образованием сыпучими телами естественных откосов объясняется целый ряд явлений, отличающих сыпучие тела от жидкостей даже и в том случае, если жидкость обладает большим внутренним трением. Так, например, пусть на дне закрома (рис. 38), в котором насыпано зерно, имеется отверстие  $A$ , служащее для ссыпки зерна из закрома. Достаточно установить под отверстием небольшую площадку  $mn$ , чтобы остановить высыпание зерна из закрома. Сперва зерно будет высыпаться на площадку, образуя конус естественного откоса; но как только вершина этого конуса достигнет отверстия закрома, то дальнейшее высыпание зерна из закрома совершенно прекратится, независимо от высоты зерна в закроме. На этом примере мы ясно видим, что равновесие сыпучих тел существенно отличается от равновесия жидкости, даже и в том случае,

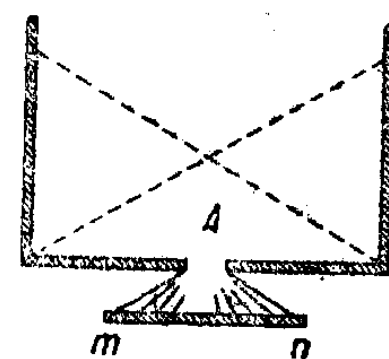


Рис. 38. Зерно в закроме.

когда жидкость обладает большим внутренним трением.

52. Равновесие гибкой нити. Представим себе цепь, состоящую из целого ряда твердых звеньев, соединенных друг с другом шарнирами которые не позволяют двум соседним звеньям расхо-

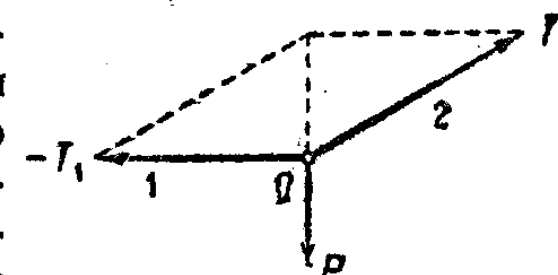


Рис. 39. Равновесие звеньев цепи.

даться, но оставляют им полную свободу поворачиваться вокруг точки соединения. В обыкновенных цепях шарниры образованы самими звеньями (кольцами), но иногда, как, например, в висячих мостах и стропилах, шарниры образованы особыми *болтами*, вложенными в отверстия двух соседних звеньев. На каждый такой шарнир (рис. 39) будут действовать следующие силы. Во-первых, натяжения —  $T_1$  и  $T_2$  соседних звеньев и, кроме того, некоторая нагрузка  $P$ . Для равновесия шарнира необходимо, чтобы

$$T_2 - T_1 + P = 0.$$

Подобные же уравнения мы можем написать для каждого шарнира цепи и, имея достаточное число уравнений, рассчитать реакции опор, где заделаны концы цепи, и усилия во всех звеньях, образующих цепь. Однако мы не будем на этом останавливаться, а считаем более интересным и более важным перейти сейчас же к случаю *гибкой, нерастяжимой нити*.

Гибкую, нерастяжимую нить (например мягкую проволоку) мы тоже можем рассматривать как цепь, состоящую из бесконечного числа элементарных звеньев, и для каждого такого звена написать уравнение равновесия,

\*) Мы предполагаем, что идем вдоль цепи слева направо, и в том же направлении считаем натяжение  $T$  *положительным*.



аналогичное тому, которое мы написали выше. Но так как звенья нити бесконечно малы, то и разность натяжений в двух соседних участках (рис. 40) нити тоже будут бесконечно мала. Мы получим в этом случае:

$$T_2 - T_1 = dT = \frac{\partial T}{\partial s} ds.$$

Кроме того, мы примем, что силы  $P$ , приложенные к нити, не сосредоточены в отдельных ее точках, а распределены *непрерывным* образом по длине нити. Если мы обозначим нагрузку *единицы длины* нити через  $p$ , то сила, приложенная к элементу нити  $ds$ , будет равна

$$p \cdot ds.$$

После этого условие равновесия элемента  $ds$  нити примет такую форму:

$$\frac{\partial}{\partial s} T + p = 0.$$

Это уравнение и будет нам служить исходным пунктом в дальнейшем. Однако прежде чем перейти к применению этого урав-

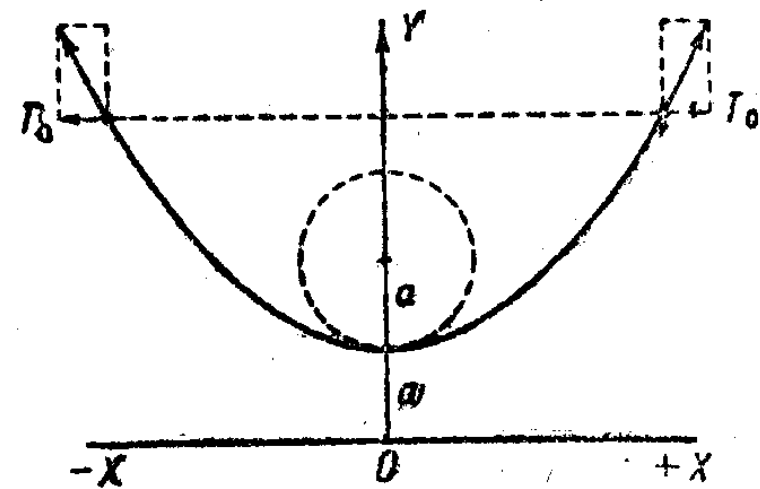


Рис. 40. Цепная линия

нения к частным случаям, полезно сделать одно преобразование общего характера. Предположим, что силы, действующие на нить, имеют потенциал и что нагрузку  $p$ , которая для различных точек нити может быть различной величины и различного направления, можно представить в виде частной производной от некоторой (скалярной) функции  $U$ :

$$p = - \frac{\partial U}{\partial s}.$$

Величина  $U$  будет тоже своего рода *потенциал сил*, действующих на нить, но потенциал этот отнесен к *единице длины нити*. Введя эту величину в уравнение равновесия, мы получаем:

$$\frac{\partial}{\partial s} T - \frac{\partial}{\partial s} U = 0,$$

и следовательно:

$$T = U + C.$$

При выборе соответствующего начала для счета потенциалов, мы можем написать:

$$T = U.$$

Итак, при равновесии нити натяжение ее в любой точке равно потенциалу сил, приложенных к нити и отнесенных к единице длины нити.

Как пример применения этой теоремы, предположим, что к нити приложены силы, направление которых в каждой точке нити *перпенди-*

*кулярно* к соответствующему элементу длины нити  $ds$ ; нить представляет таким образом, эквипотенциальную линию по *я* сил, действующих на нить. В таком случае  $U = \text{const}$  и  $T = \text{const}$ : натяжение нити по всей ее длине одно и то же.

53. Равновесие нити под действием собственного веса. Мы получили для равновесия нити векторное уравнение

$$\frac{\partial}{\partial s} T + p = 0.$$

Если на нить действует только ее собственный вес, то нить будет висеть в вертикальной плоскости. Возьмем в этой плоскости прямоугольную систему координат и направим ось  $OX$  горизонтально, а ось  $OY$  вертикально вверх (рис. 40). Наше векторное уравнение распадается на два скалярных уравнения:

$$\frac{\partial}{\partial s} T_x + p_x = 0; \quad \frac{\partial}{\partial s} T_y + p_y = 0.$$

Проекция натяжения нити  $T$  на оси координат мы можем представить в таком виде:

$$T_x = T \cdot \cos(T \cdot X) = T \frac{dx}{ds}; \quad T_y = T \cdot \sin(T \cdot X) = T \frac{dy}{ds}.$$

Так как внешние силы вертикальны ( $p_x = 0$ ;  $p_y = -p$ ), то уравнения принимают вид:

$$\frac{\partial}{\partial s} \left( T \frac{dx}{ds} \right) = 0; \quad \frac{\partial}{\partial s} \left( T \frac{dy}{ds} \right) - p = 0;$$

Интегралы этих уравнений будут:

$$T_x = T \frac{dx}{ds} \text{ const} = pa;$$

$$T_y = T \frac{dy}{ds} = p(s + C).$$

Первое из этих уравнений показывает, что горизонтальная проекция натяжения нити по всей длине одна и та же. Для симметрии со вторым уравнением мы положили эту постоянную интегрирования пропорциональной нагрузке  $p$ , но самый коэффициент пропорциональности  $a$  мы оставляем пока неопределенным; он зависит от условий задачи: от длины нити, от расстояния между опорами и т. п.

Во втором уравнении мы можем положить постоянную интегрирования  $C$  равной нулю. Это означает, что мы будем считать начало нити  $s = 0$  в той ее точке, где  $T_y = 0$ , т. е. в той точке, где нить горизонтальна; очевидно, это будет нижайшая точка нити. Итак, мы получили два уравнения:

$$T_x = pa; \quad T_y = ps.$$

Натяжение  $T$  во всякой точке нити совпадает с направлением касательной к линии нити; поэтому мы получим величину тангенса угла

наклонения этой касательной к горизонту, если разделим второе уравнение на первое:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx} = \frac{s}{a}.$$

Из этого уравнения мы уже можем получить некоторое понятие о форме, которую принимает линия нити под действием ее собственного веса. В нижней точке ( $s=0$ ;  $\alpha=0$ ) нить горизонтальна, а затем ее наклон к горизонту все увеличивается (рис. 40), причем тангенс угла наклона касательной к горизонту пропорционален длине нити от нижней точки до рассматриваемой. Этим свойством обладает так называемая *цепная линия*.

Для того чтобы получить уравнение линии нити, мы можем поступить следующим образом. Возведем вышенаписанное уравнение в квадрат и прибавим к обеим частям его единицу. Приняв во внимание, что

$$(dx)^2 + (dy)^2 = (ds)^2,$$

мы получаем:

$$\frac{ds}{dx} = \frac{\sqrt{a^2 + s^2}}{a}; \quad d\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{ds}{\sqrt{a^2 + s^2}}.$$

Это уравнение при интегрировании дает:

$$\frac{x}{a} = \operatorname{lg} \frac{s + \sqrt{a^2 + s^2}}{a}.$$

Постоянную интегрирования мы приняли равной нулю, приняв, что при  $s=0$  (т. е. для нижней точки нити),  $x=0$ .

Теперь мы произведем ту же самую операцию с уравнением, обратным вышенаписанному; тогда получаем:

$$\frac{ds}{dy} = \frac{\sqrt{a^2 + s^2}}{s}; \quad y = \sqrt{a^2 + s^2}.$$

И здесь мы положили постоянную интегрирования равной нулю и имеем при  $s=0$ ,  $y=a$ . Выбранные нами постоянные интегрирования соответствуют положению осей координат, которое изображено на рис. 40.

Мы получили, таким образом, уравнение линии нити в *параметрической* форме, причем параметром служит длина нити  $s$ , считаемая от ее нижней точки. Для того чтобы получить уравнение в обычной форме, мы должны исключить параметр из наших двух уравнений. В результате получаем:

$$y = \frac{a}{2} \left( e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right) = a \cdot \operatorname{ch} \left( \frac{x}{a} \right).$$

Это есть уравнение *цепной линии*. Название „цепная“ эта линия получила именно по той причине, что такую форму принимает цепь (или гибкая нить), висящая на двух опорах, под действием собственного веса.

Послуживает некоторого интереса кривизна цепной линии. Предоставляем читателю проверить формулу для радиуса кривизны:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{a} \frac{ds}{dx} = \frac{\sqrt{a^2 + s^2}}{a^2}; \quad \rho = \frac{\left[ 1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}} = \frac{a^3 + s^3}{a}.$$

Наименьший радиус кривизны будет в нижней точке нити ( $s=0$ ):

$$\rho_{\min} = a.$$

Наша задача еще не доведена до конца: у нас осталась неопределенной величина  $a$ . Эта постоянная интегрирования может быть определена только из так называемых *пограничных условий*. Так, например, если нам дана длина  $l$  нити и провес ее  $f$ , т. е. разность между ординатами опоры и нижней точкой нити, то из уравнения:

$$y = f + a = \sqrt{a^2 + s^2}$$

можно определить  $a$ . По известному  $a$  вычисляются затем и все остальные величины, входящие в приведенные выше уравнения.

**54. Упрощение задачи.** На практике, однако, большей частью бывает дано расстояние между опорами  $l$  и возможный провес проволоки  $f$ ; а в таком случае приходится определять постоянное  $a$  из трансцендентного уравнения цепной линии, что представляет значительные неудобства. Но в тех случаях, когда провес проволоки невелик по сравнению с расстояниями между опорами, можно довольствоваться приближением. Если разложить правую часть уравнения цепной линии в ряд по степеням величины  $\frac{x}{a}$  и ограничиться вторыми степенями, то получим:

$$y = f + a = \frac{a}{2} \left[ \left( 1 + \frac{x}{a} + \frac{x^2}{2a^2} \right) + \left( 1 - \frac{x}{a} + \frac{x^2}{2a^2} \right) \right],$$

или (приняв начало координат в нижней точке кривой):

$$y' = f = \frac{x^2}{2a}.$$

Это есть уравнение параболы, из которого можно определить  $a$  без особых затруднений.

Положим, например, что нам даны расстояние между опорами  $l$  и допустимый провес проволоки  $f$ . Пусть опоры находятся на одинаковой высоте от горизонта. Подставляя эти данные в написанное уравнение, получаем:

$$x = \frac{l}{2}; \quad a = \frac{l^2}{8f}.$$

Определив значение  $a$ , вычисляем угол  $\alpha$ , т. е. наклон линии к горизонту, и натяжение нити в различных ее точках:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx} = \frac{x}{a} = \frac{8f}{l^2} x;$$

$$T_x = \frac{pl^2}{8f}; \quad T_y = T_x \operatorname{tg} \alpha = px.$$

Для самих опор, где  $x = \frac{l}{2}$ , мы получаем:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{4f}{l};$$

$$T_x = \frac{pl^2}{8f}; \quad T_y = \frac{1}{2} pl.$$

В нижней точке нити мы имеем натяжение:

$$T_x = \frac{pl^2}{8f}; \quad T_y = 0.$$

Не представляет особых затруднений решить подобную же задачу для случая, когда опоры лежат на разных высотах и т. д.

55. Линия давления в своде. Некоторое сходство с предыдущей задачей имеет задача: определить линию, вдоль которой действует давление в своде. При составлении уравнения равновесия для цепи или для гибкой нити мы с самого начала приняли, что силы  $T$  представляют *натяжения*. Такое предположение вполне естественно, так как ни цепь, ни нить не могут выдерживать продольное сжатие, и если бы в исключительном случае такое сжатие наступило, то оно было бы чрезвычайно неустойчивым: при малейшем отклонении сил от точно долевого направления как цепь, так и нить сейчас же согнутся. Тем не менее уравнения наши остаются в силе и для тех случаев, когда  $T$  представляет доленое *сжатие*, и мы можем воспользоваться ими для решения задачи, взятой из совершенно другой области.

Представим себе сводчатое перекрытие (рис. 42);  $A$  и  $B$  суть опоры, или *пяты* свода, а  $C$  — вершина, или *замок* свода. Назначение свода состоит в том, чтобы передать нагрузку, находящуюся над ним, на опоры  $A$  и  $B$ . Для некоторых конструктивных соображений, а также для проверки прочности и устойчивости свода, желательно знать, по каким линиям действует *давление внутри свода* при передаче веса нагрузки на опоры.

На рис. 42 у нас проведена одна из таких линий давления. Если мы выделим мысленно элемент  $ds$  этой линии и обозначим через  $T_1$  и  $T_2$  *давления* на концах этого элемента; а через  $P$  — нагрузку, приходящуюся на этот элемент, то можем написать уравнение равновесия (рис. 41; ср. рис. 39):

$$T_1 - T_2 + P = 0.$$

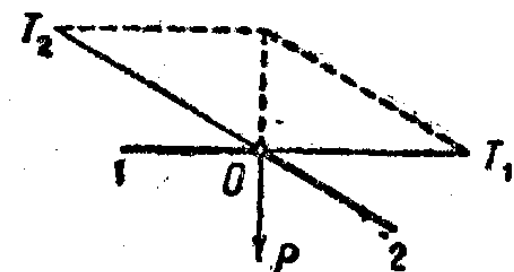


Рис. 41. Давление внутри свода.

При применении этого уравнения к нашему случаю мы предположим, что нагрузка свода вертикальна и что она равномерна распределена по длине  $l$  (рис. 42) пролета свода. Возьмем ось  $OX$  горизонтально и ось  $OY$  вертикально вверх (как в предыдущих задачах), напишем проекции уравнения равновесия:

$$\begin{aligned} dT_x &= 0; \\ -dT_y &= p \cdot dx. \end{aligned}$$

Первое уравнение дает нам опять, что при вертикальной нагрузке горизонтальная составляющая давления везде одинакова (это есть одно из постоянных интегрирования наших уравнений). Мы положим (как и в предыдущей задаче)

$$T_x = pa.$$

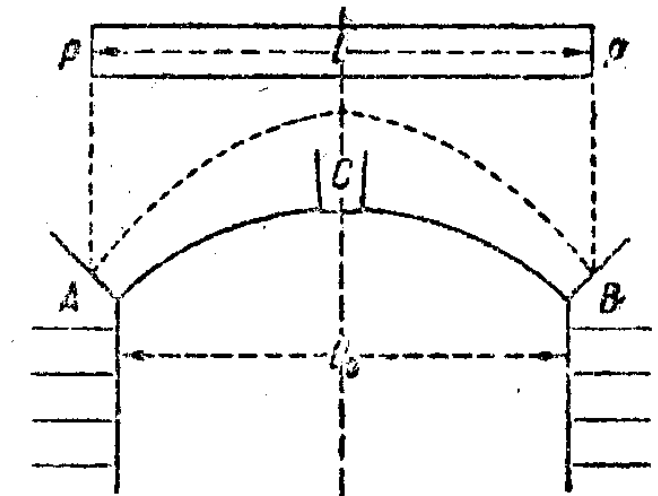


Рис. 42. Линия давления в своде.

Обозначив через  $\alpha$  угол наклона касательной к горизонту, мы можем вертикальную составляющую давления  $T_y$  выразить через  $T_x$ :

$$T_y = T_x \operatorname{tg} \alpha = T_x \frac{dy}{dx}.$$

Подставляя это выражение во второе уравнение равновесия, имеем:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{a}.$$

Это уравнение легко интегрируется:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \operatorname{tg} \alpha = -\frac{x}{a} + C, \\ y &= -\frac{x^2}{2a} + Cx + D. \end{aligned}$$

Если мы выберем начало координат в вершине кривой, то  $C = D = 0$ , и мы получим:

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{x}{a}; \quad y = -\frac{x^2}{2a}.$$

Как видим, кривая давления в своде при равномерной вертикальной нагрузке представляет собой *параболу*. Что касается до постоянной  $a$ , то она от величины нагрузки не зависит и определяется из пограничных условий.

Если мы сравним наш результат для линии давления в своде с тем, который мы получили для гибкой нити, то заметим следующие различия. Во-первых, в основных уравнениях равновесия имеется различие в *знаке* сил; это произошло от того, что в нити мы имели *натяжения*, тогда как в своде мы предполагали *давления*. Эта разница в знаке отразилась в результате тем, что кривая нити обращена вершиной вниз, тогда как

кривая в своде обращена вершиной вверх. Что касается самой формы кривой, то для нити мы получили цепную линию, тогда как для свода мы получили параболу. Это различие обусловлено исключительно выбором *нагрузки*: в нити мы предполагали нагрузку равномерно распределенной *по длине нити*  $s$  (собственный вес нити), тогда как в своде мы приняли нагрузку равномерно распределенной по горизонтальной плоскости над сводом. В предыдущем параграфе мы приняли для упрощения задачи, что провес нити очень мал, т. е. что нить почти *горизонтальна*; но такое предположение равносильно принятию равномерно распределенной нагрузки *по оси*  $OX$ , оттого мы и в предыдущем параграфе получили в результате параболу на место цепной линии.

Иногда при расчете сводов принимают нагрузку, распределенной неравномерно или даже меняющейся со временем (прохождение поезда над сводом); в таком случае и кривая давления уже не будет параболой.

Когда кривая давления в своде определена (или когда определены все возможные кривые при различных, между прочим и при переменных нагрузках), то стараются делать разрезку камней (направление плоскостей соприкосновения соседних камней) в своде так, чтобы плоскости разрезки были по возможности нормальны к линиям давления. Исполнить это условие вполне точно, конечно, невозможно, в особенности при переменной нагрузке, но этого и не требуется, так как соседние камни удерживаются от соскальзывания взаимным трением и в особенности цементом.

Нередко и в сыпучих телах можно наблюдать образование сводиков. Так, например, можно взять деревянный ящик, сделать небольшое отверстие в его дне, и закрыв отверстие снаружи дощечкой, насыпать в ящик песку; затем можно осторожно отнять дощечку от отверстия, причем немного песку высыплется, а остальной песок будет оставаться в ящике, несмотря на открытое отверстие. Это явление объясняется образованием над отверстием *сводиков*, составленных из отдельных песчинок, которые и распределяют вертикальное давление песка на стенки и дно ящика помимо отверстия. Как и в случае сводов правильной кладки, о которой мы говорили выше, сводики песчинок не должны непременно следовать за кривыми давления, потому что и песчинки удерживаются от соскальзывания взаимным трением.

56. Гибкая нить, намотанная на цилиндр. Рассмотрим еще один случай равновесия гибкой нити, когда она намотана на цилиндр, причем примем во внимание также силу трения нити о поверхность цилиндра. Эта задача имеет некоторое практическое значение. Очень часто при спуске тяжелых грузов, привязанных к канату, или при причаливании судов к пристани, наматывают канат на какое-либо неподвижно закрепленное бревно; благодаря силе трения каната о бревно таким способом удается удержать груз или судно сравнительно небольшою силой. Правда, канат не обладает такой гибкостью, какую мы предполагаем в нити, но для объяснения рассматриваемого явления сопротивление каната изгибу играет только второстепенную роль.

Пусть  $ds$  (рис. 43) представляет собой часть нити каната. Разность натяжений нити  $dT$  на концах этого элемента будет стремиться сдвинуть его по поверхности цилиндра; этому будет сопротивляться сила трения

нити о поверхность цилиндра. Обозначив через  $R_t$  силу трения на единицу длины нити, можем написать уравнение равновесия:

$$dT = R_t \cdot ds.$$

Сила трения пропорциональна нормальному давлению:

$$R_t = R_n \cdot f.$$

При определении величины нормального давления  $R_n$  мы можем пренебречь незначительной разницей натяжений на концах элемента  $ds$  и считать  $R_n ds$  равнодействующей двух равных сил  $T$ , наклоненных друг к другу под углом  $da$ . Тогда на основании рис. 44 можем написать:

$$R_n ds = 2T \sin \frac{1}{2} da.$$

При малой величине  $da$  мы можем синус заменить дугой:

$$R_n ds = T \cdot da.$$

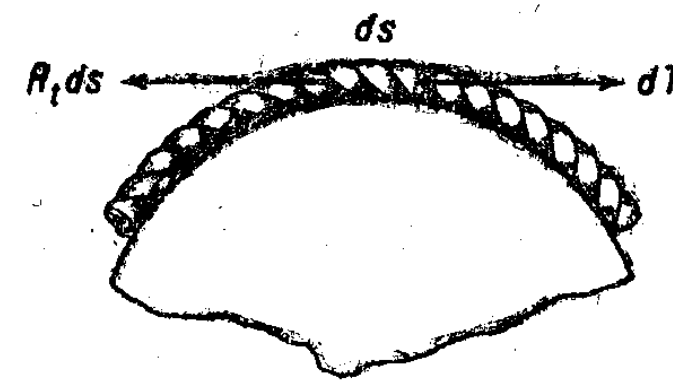


Рис. 43. Канат на цилиндре.

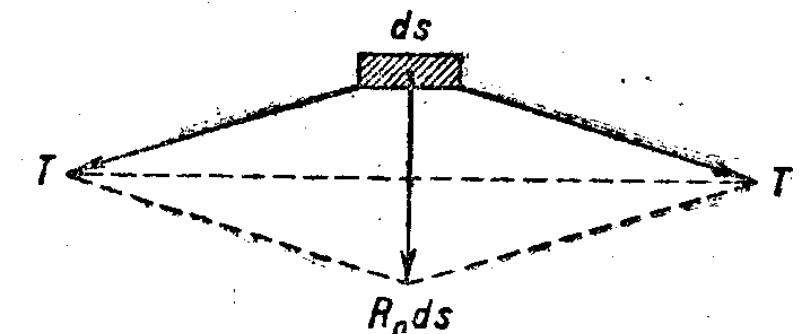


Рис. 44. Давление каната на цилиндр.

Умножаем эту величину на коэффициент трения  $f$  и подставляем в уравнение равновесия. Тогда получаем:

$$dT = fT \cdot da; \quad \frac{dT}{T} = f \cdot da.$$

Это уравнение при интегрировании дает:

$$\lg \frac{T}{T_0} = fa; \quad T = T_0 10^{fa}.$$

Здесь  $T$  означает натяжение того конца нити, к которому приложена большая сила, тогда как  $T_0$  — натяжение другого конца нити.

Положим, например, что коэффициент трения  $f = 1/4$ ; тогда при одном обороте нити вокруг цилиндра ( $a = 2\pi$ ) отношение между  $T$  и  $T_0$  получается равным 4,8. При тех оборотах нити это отношение оказывается более 100! Таким образом объясняется явление, наблюдаемое при наматывании каната на бревно.

## ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ

### ВРАЩЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ОСИ

57. Общие замечания. Явления вращения твердого тела представляют громадный научный и практический интерес, но явления эти довольно сложны, а потому мы начнем их изучение с простейшего случая, когда тело вращается вокруг *неподвижной оси*. Основные уравнения механики твердого тела (стр. 26, 20):

$$\dot{P} = M\dot{v}_c = F; \quad \dot{K} = M$$

в применении к этому случаю несколько упрощаются.

Во-первых, скорость движения центра инерции  $v_c$  может быть выражена через угловую скорость вращения тела  $u$  и расстояние центра инерции  $r$  от оси вращения:

$$v = [ur].$$

Далее, момент импульса  $K$  в общем случае выражается формулой (стр. 21, 17):

$$K = T_r(u).$$

Но если ось вращения неподвижна, то мы можем ее принять за одну из осей координат, например  $OX$ , и тогда момент импульса будет иметь проекциями (ср. стр. 21, 17):

$$K_x = Au_x; \quad K_y = -Fu_x; \quad K_z = -Eu_x.$$

Наконец, если осью вращения служит одна из осей инерции тела, то мы имеем:

$$K_x = Au_x; \quad K_y = 0; \quad K_z = 0.$$

Нетрудно видеть, что твердое тело, вращающееся вокруг неподвижной оси, имеет только *одну* степень свободы. Благодаря этому в выражение для кинетической энергии тела войдет только одна скорость, например, угловая скорость вращения тела вокруг данной оси. На основании выше-написанных формул мы можем непосредственно написать выражение для кинетической энергии вращения тела:

$$2T = Mr^2u^2 + Au^2 = M(r^2 + k^2)u^2.$$

58. Атвудова машина. Мы имели уже случай рассчитывать действие машины Атвуда (ч. II, стр. 293, 203); однако, тогда при расчете мы пренебрегли массой блока, через который перекинута нить с гирьками (рис. 45); теперь мы можем исправить эту неточность.

Обозначим через  $m_1$  и  $m_2$  массы гирек, а через  $m_3$  и  $k$  — массу и радиус инерции блока вокруг его оси вращения  $O$  (которая проходит через центр инерции блока). Кинетическая энергия обеих гирек и блока выразится формулой:

$$2T = m_1v_1^2 + m_2v_2^2 + m_3k^2u^2.$$

Но скорости гирек равны и противоположны:

$$v_1^2 = v_2^2,$$

и если нить не скользит по ободу блока, то скорость гирек (и нити) равна скорости обода блока. Обозначив радиус блока через  $a$ , можем написать:

$$v = ua.$$

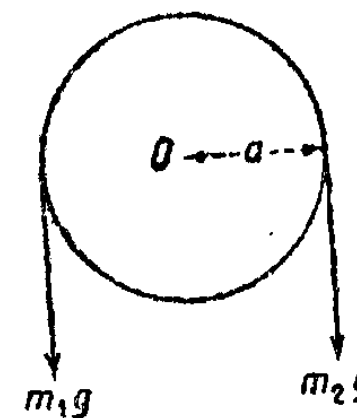


Рис. 45. Машина Атвуда.

Приняв все это во внимание, мы можем кинетическую энергию всей системы выразить через скорость гирек:

$$2T = \left[ m_1 + m_2 + m_3 \left( \frac{k}{a} \right)^2 \right] v^2.$$

На рассматриваемую систему действует сила тяжести, равная разности весов обеих гирек:

$$F = (m_1 - m_2)g.$$

Напишем уравнение эффекта сил, т. е. приравняем изменение кинетической энергии системы со временем эффекту силы:

$$\frac{dT}{dt} = Fv; \\ \left[ m_1 + m_2 + m_3 \left( \frac{k}{a} \right)^2 \right] \dot{v} = (m_1 - m_2)g.$$

Отсюда определяется ускорение движения гирек  $\dot{v}$ , а по нему и ускорение вращения блока:

$$\dot{v} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + m_3 \left( \frac{k}{a} \right)^2} g, \quad \dot{u} = \frac{\dot{v}}{a}.$$

Если мы сравним этот результат с тем, который мы получили раньше, то увидим, что инерция блока несколько замедляет движение гирек, чего и надо было ожидать; однако, теперь мы получили численную величину этого замедления.

59. Пример. Момент инерции блока атвудовой машины можно определить из опыта, например следующим образом.

Задавшись определенной высотой  $h$  падения гирек, замечаем по возможности точно время падения  $t_1$ ; соответствующее ускорение будет равно:

$$\dot{v} = \frac{2h}{t_1^2}.$$

Затем, прибавляя к обеим гирькам равные грузы  $m$  и повторяя опыт притой же высоте падения  $h$ , опять замечаем время падения  $t_2$ ; соответствующее ускорение будет равно:

$$\ddot{v}_2 = \frac{2h}{t_2^2}.$$

Подставляя эти данные в нашу формулу, получаем два уравнения; деля одно уравнение на другое, причем  $g$  и  $h$  сокращаются, мы получаем:

$$\left[ m_1 + m_2 + m_3 \left( \frac{k}{a} \right)^2 \right] \frac{1}{t_1^2} = \left[ m_1 + m_2 + 2m + m_3 \left( \frac{k}{a} \right)^2 \right] \frac{1}{t_2^2}.$$

В это уравнение входят только отношения между массами (можно разделить уравнение, например, на  $m$ ), которые нетрудно определить взвешиванием.

Радиус блока  $a$  определяется измерением его периферии, к которой прилежит нить. Зная все эти величины, можем из написанного уравнения определить  $k$  — радиус инерции блока.

Впрочем, машина Атвуда, вообще не приспособлена к особо точным измерениям, а при демонстрациях на лекции стараются упростить задачу, чтобы сделать ее как можно более наглядной; поэтому инерцией блока обыкновенно пренебрегают. Для того чтобы это было возможно, делают блок из легкого материала (алюминия), и делают его не сплошным, а с большими отверстиями, в виде колеса; все это уменьшает момент инерции блока. С другой стороны, вес гирек выбирается побольше. При таких условиях инерция блока будет иметь лишь незначительное влияние на ускорение всей системы.

60. Физический маятник. В части II (стр. 157, 104) мы изучали колебания материальной точки, остающейся при движении на неизменном расстоянии от некоторого центра  $O$  и подверженной действию силы тяжести. Такое движение можно реализовать, подвесив небольшой тяжелый шарик на тонкой нити, и такое приспособление (почему-то) принято называть *математическим* маятником. Если же мы имеем маятник со стержнем, массой которого нельзя пренебрегать при расчете, и с чечевицей больших размеров, которую нельзя принимать за материальную точку, то в отличие от математического маятника, его принято называть *физическим* маятником. Мы можем обобщить этот термин и называть физическим маятником всякое твердое тело любой формы, подвешенное на горизонтальной оси, около которой оно способно качаться под действием силы тяжести. Такое тело мы имеем, например, в рычажных весах (стр. 50, 40) и в других измерительных приборах.

Пусть  $O$  (рис. 46) представляет точку пересечения оси качания, которую нужно себе представлять перпендикулярной к чертежу, с плоскостью нашего рисунка, а  $C$  — центр тяжести тела. При отклонении линии  $OC = r$  от вертикали на некоторый угол  $\alpha$  вес тела  $mg$  (приложенный к центру тяжести) образует вокруг оси  $O$  момент сил, равный  $mgr \sin \alpha$ .

Если мы обозначим через  $I$  момент инерции тела вокруг оси  $O$ , то уравнение моментов напишется так:

$$-mgr \sin \alpha = I \ddot{\alpha}.$$

Это уравнение отличается от уравнения математического маятника

$$-g \sin \alpha = l \ddot{\alpha}$$

только тем, что на место длины математического маятника  $l$  мы имеем теперь величину

$$\frac{J}{mr}.$$

Поэтому вся теория математического маятника (ч. II, стр. 157, 104—110) приложима и к физическому маятнику, если мы положим в наших прежних формулах

$$l = \frac{J}{mr}.$$

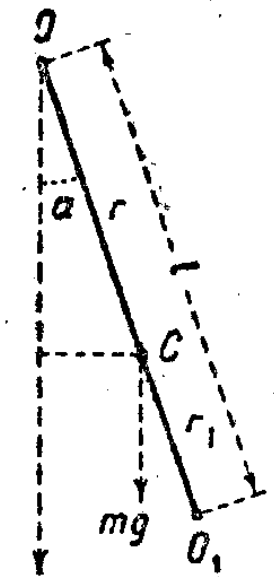


Рис. 46. Центр качания.

Между прочим, если мы возьмем математический маятник такой именно длины, как указывает эта формула, то и период качания его будет одинаков с периодом качания рассматриваемого тела. Это замечание остается в силе не только для малых, но также и для больших амплитуд качания.

Для малых амплитуд качания (положив  $\sin \alpha = \alpha$ ), мы получаем период качания тела

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mrg}}.$$

Математический маятник можно рассматривать как частный случай физического маятника. Действительно, момент инерции  $I$  математического маятника равен  $ml^2$ , а расстояние  $r$  его центра тяжести от оси качания равно  $l$ ; при этих значениях  $I$  и  $r$  мы имеем:

$$\frac{I}{mr} = l.$$

Итак,  $l$  представляет длину математического маятника, эквивалентного по своему периоду качания (*изо периодического*) рассматриваемому нами физическому маятнику. Если мы повесим на ось  $O$ , около которой качается тело, небольшой тяжелый шарик и длину нити возьмем равную  $l$ , то шарик придется около точки  $O_1$  (рис. 46). Отклоним шарик вместе с телом, прижимая шарик к точке  $O_1$ , и затем пустим их качаться вместе; тогда шарик будет качаться, оставаясь все время около точки  $O_1$ . Точка  $O_1$  называется центром качания тела.

61. Свойства центра качания. Докажем, что расстояние  $l$  центра качания  $O_1$  от точки привеса  $O$  маятника всегда больше  $r$  — расстояния центра тяжести от  $O$ . Обозначим для этого через  $I_0$  момент инерции

тела вокруг центра тяжести  $C$  (точнее вокруг — оси, проходящей через центр тяжести и параллельной оси  $O$ ). Тогда, как известно (стр. 20, 15):

$$I = I_0 + mr^2,$$

и следовательно,

$$l = \frac{I_0}{mr} + r,$$

откуда видим, что

$$l > r.$$

Если мы обозначим через  $r_1$  расстояние центра тяжести от центра качания, то на основании той же формулы можем написать (ср. рис. 46):

$$r_1 = l - r = \frac{I_0}{mr} = \frac{k^2}{r},$$

или:

$$r \cdot r_1 = k^2,$$

где  $k$  обозначает радиус инерции тела вокруг оси, проходящей через центр тяжести и параллельной оси  $O$ . Таким образом радиус инерции тела представляет среднее пропорциональное между расстояниями его от оси качания и от центра качания.

Если мы перевернем маятник и повесим его за точку  $O_1$ , т. е. дадим ему качаться вокруг оси  $O_1$ , параллельной прежней оси  $O$ , то тогда, очевидно, расстояние центра тяжести от оси качания будет равно  $r_1$ , а наша формула показывает, что в таком случае расстояние центра тяжести от центра качания должно быть равно

$$\frac{I_0}{mr_1} = r.$$

Таким образом точки  $r$  и  $r_1$  обладают свойством *взаимности*: когда одна из них служит *осью* качания, то другая служит *центром* качания. Отсюда следует также, что и длина эквивалентного маятника

$$l = r + r_1$$

и период качания маятника  $T$  будут одни и те же, будет ли он качаться вокруг оси  $O$  или вокруг оси  $O_1$ .

62. **Оборотный маятник Катера.** На указанном свойстве осей  $O$  и  $O_1$  физического маятника Катер (Kater, 1818) основал очень точный способ измерения ускорения силы тяжести.

Твердый стержень  $AB$  (рис. 47) снабжен двумя призмами  $O$  и  $O_1$ , ребра которых обращены друг к другу; расстояние между этими ребрами можно измерить с большой точностью. На стержне надеты две тяжелые чечевицы  $A$  и  $B$ , которые можно передвигать вдоль стержня и закреплять на любых расстояниях от призм. Измеряют период качания маятника,

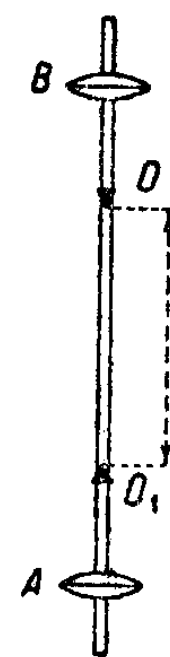


Рис. 47. Оборотный маятник.

во-первых, когда он висит на ребре  $O$ , и во-вторых, когда он висит на ребре  $O_1$ . Передвижением чечевиц, т. е. изменением момента инерции маятника и положения его центра тяжести, добиваются того, чтобы в обоих случаях период качания маятника был один и тот же; этого не трудно достичь, и притом с большой точностью. Если это достигнуто, то наблюдаемому периоду качания  $T$  соответствует длина математического маятника  $l$ , равная расстоянию между ребрами призм. Полученные таким образом величины  $T$  и  $l$  позволяют вычислить ускорение силы тяжести  $g$  в том месте, где производился опыт, по формуле:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Впрочем, если даже периоды качания маятника вокруг осей  $O$  и  $O_1$  немного отличаются друг от друга (точка  $O_1$  не совсем точно совпадает с центром качания), тем не менее полученные из опытов данные после введения соответствующих поправок могут служить для точного определения величины  $T$ . Кроме того, при точных измерениях принимают целый ряд других предосторожностей, на которых мы здесь не можем останавливаться.

63. **Крутильный маятник.** Мы рассматривали сейчас качания тела вокруг *горизонтальной* оси под действием силы тяжести. Рассмотрим теперь тело с *вертикальной* осью вращения, на которое действует какая-либо сила, сопротивляющаяся его поворотам. Эта сила может быть реализована какой-либо пружиной, или тело может висеть на вертикальной проволоке или нити, закручивающейся при повороте тела. Подобные приспособления мы имеем в целом ряде измерительных приборов: в амперметрах, вольтметрах, гальванометрах и т. п.; такое приспособление мы уже рассматривали при описании опытов Кавендиша, Бойса и других (ч. II, стр. 84, 57, 58), и самый крутильный маятник мы имели случай изучать в общей механике (ч. II, стр. 100, 72). Однако здесь мы рассмотрим этот вопрос в более общей форме, предполагая тело любой формы, точно так же и сила, сопротивляющаяся его поворотам, тоже может быть реализована как угодно; однако, для большей ясности и простоты задачи мы предположим момент этой силы пропорциональным углу  $\alpha$  поворота тела. Обозначив коэффициент пропорциональности через  $\frac{1}{\delta}$ , мы можем написать уравнение моментов в следующем виде:

$$M = \frac{\alpha}{\delta} = -I\ddot{\alpha}; \quad \alpha = -I\delta \cdot \ddot{\alpha},$$

и следовательно, период колебания рассматриваемого тела вокруг вертикальной оси будет равен:

$$T = 2\pi \sqrt{I \cdot \delta}.$$

Чувствительность прибора (угол  $\alpha$  при данном моменте внешних сил) будет тем больше, чем больше коэффициент упругости  $\delta$ . Отсюда заключаем, что большая чувствительность всегда будет сопровождаться большим

периодом колебания прибора  $T$ ; а если мы желаем уменьшить этот период, чтобы сократить время, протекающее от начала действия внешнего момента сил до наблюдения отклонения прибора, то должны уменьшить, насколько это возможно, момент инерции  $I$  подвижной части прибора.

Все эти результаты применимы также к и случаю качания тела вокруг *горизонтальной* оси. При малых отклонениях мы и в этом случае имеем момент силы тяжести, пропорциональный углу отклонения:

$$M = mgr \cdot a.$$

Рычажные весы (стр. 50, 40) тоже представляют собою один из частных случаев этого закона: — там мы имели чувствительность:

$$s = \frac{\varphi}{q} = \frac{a}{g_0 r},$$

и момент сил пропорциональный углу отклонения  $\varphi$ :

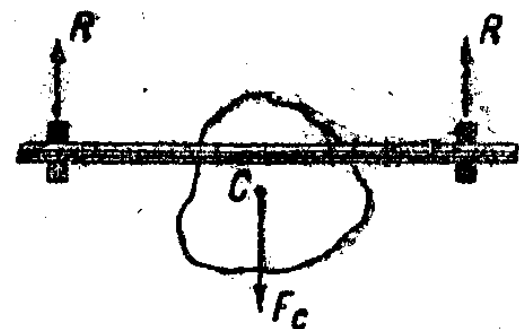


Рис. 48. Реакции опор оси вращения.

$$M = qa = g_0 r \cdot \varphi.$$

В этом случае чувствительность пропорциональна длине коромысла. Но, с другой стороны, момент инерции коромысла пропорционален квадрату его длины. Этим объясняется, почему стараются делать коромысло короче хотя бы и в ущерб чувствительности (ср. стр. 51, 41).

64. Реакция оси вращения. Пусть тело вращается вокруг оси  $O$  с угловой скоростью  $u$  (рис. 48), центр тяжести  $c$  находится от оси вращения на расстоянии  $a$ . Тогда при вращении на ось будет действовать центробежная сила:

$$F_c = M \frac{v^2}{a} = Mu^2 a = Mau^2,$$

направленная от оси к центру тяжести. Реакция оси  $R$  будет *равна и противоположна* этой силе.

Мы можем получить этот результат и из нашего основного уравнения импульсов:

$$\dot{P} = M \dot{v} = F.$$

При вращении твердого тела вокруг неподвижной оси с постоянной угловой скоростью скорости всех точек тела остаются постоянными по величине, но меняют только свое направление. Поэтому и импульс тела тоже будет оставаться постоянным по величине и изменяться только по своему направлению. В подобных случаях быстрота изменения вектора выражается через угловую скорость его вращения формулой (ч. I, стр. 42, 43 ч. II, стр. 18, 11):

$$\dot{P} = [uP] = M[uv].$$

Так как на тело не действуют никакие внешние силы, кроме реакции оси, то мы должны положить

$$R = -M[uv].$$

Этот результат совпадает с полученным нами выше.

65. Пример. В настоящее время угловые скорости вращения в некоторых технических приборах бывают очень значительны, и небольшая асимметрия в расположении материала во вращающихся частях может произвести при вращении опасные для прочности оси центробежные силы. Так, например, некоторые турбины Лавалья делают до 200 оборотов в секунду, и скорости точек на их периферии могут при этом достигать 400 метров в секунду. Если мы предположим на периферии подобной турбины излишек массы всего в 10 г, то получим центробежную силу в

$$F_c = muv = \frac{10}{981} \cdot 2\pi \cdot 200 \cdot 4 \cdot 10^4 = 5 \cdot 10^5 \text{ г} = 500 \text{ кг}.$$

Уже из этого примера мы видим, как важно добиваться осевой симметрии во вращающихся частях не только в отношении *геометрической* их формы, но также и в расположении *масс*. Так как на практике нельзя достичь желаемой симметрии одной только тщательностью в выделке вращающейся части, то после выделки и сборки вращающиеся части подвергают особому испытанию на специальных приборах, которые позволяют измерять центробежные силы, действующие на ось вращения; добавляя или отнимая небольшие массы в различных местах вращающейся части, добиваются возможного минимума центробежных сил.

66. Момент, ломающий ось. Но предположим, что центр тяжести тела совершенно *точно* совпадает с осью вращения; тем не менее, если ось не направлена по одной из главных осей инерции тела, могут появиться моменты сил, направление которых перпендикулярно к оси и которые стремятся сломать ось. Чтобы показать это, нам нужно обратиться к уравнению моментов. Направим ось  $OX$  по оси вращения. Если мы возьмем оси  $OY$  и  $OZ$ , вращающиеся вместе с телом, то получим проекции момента импульса на эти оси в виде (ср. стр. 23, 17):

$$K_x = Au; \quad K_y = -Fu; \quad K_z = -Eu.$$

По отношению к самому телу эти три величины постоянны, как и самый вектор  $K$ ; но по отношению к внешнему пространству вектор  $K$ , оставаясь постоянным по величине, изменяет свое направление, вращаясь с постоянной скоростью  $u$ . А мы уже неоднократно видели (стр. 74, 57; стр. 80, 64), что изменение вращающегося вектора со временем по отношению к неподвижному пространству выражается формулой:

$$\dot{K} = [uK].$$

Сообразно с этим наши уравнения моментов (которые нужно относить к неподвижному пространству) напишутся таким образом:

$$M \dot{v} = K \cdot 0;$$



$$M_y = K_y = -u K_z = +Eu^2;$$

$$M_z = K_z = +u K_y = -Fu^2.$$

Так как внешних сил (кроме реакции оси) мы не имеем, то эти моменты должны уничтожаться (уравновешиваться) моментами реакции оси. Следовательно, результирующий момент реакции оси будет равен:

$$M_r = u^2 \sqrt{E^2 + F^2}.$$

Этот момент перпендикулярен к оси, и, следовательно, ось должна сопротивляться излому в поперечном направлении (рис. 49). Относительно вращающегося тела момент  $M_z$  постоянен и по величине и по направлению, тогда как относительно внешнего неподвижного пространства момент вращается с постоянной угловой скоростью. Если мы, оставив ось  $OX$  вдоль оси вращения (которая неподвижна), возьмем неподвижные оси  $OY$  и  $OZ$  перпендикулярно к этому направлению, то получим проекции момента на неподвижные оси в виде:

$$M_x = M_r \cos ut; \quad M_y = M_r \sin ut.$$

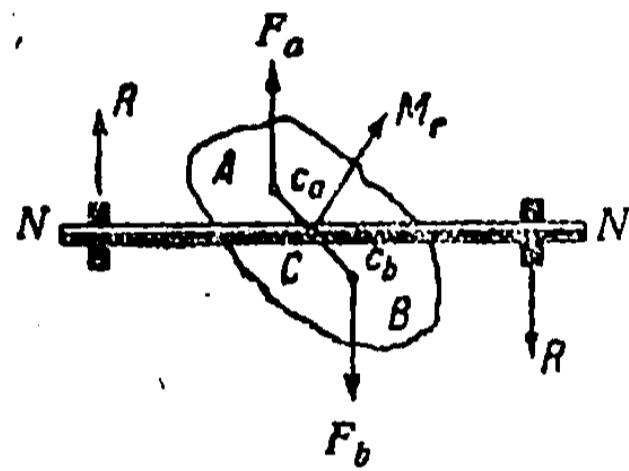


Рис. 49. Момент реакции оси вращения.

Вращательное движение всегда можно разложить на два взаимно перпендикулярных гармонических колебания (ч. II, стр. 133, 91). Отсюда мы видим, что подшипники, в которых вращается ось, будут подвержены силам, которые должны приводить их в сотрясение.

Если ось вращения совпадает с одной из главных осей инерции тела, то  $F$  и  $E$  равны нулю, и вместе с тем пропадают и моменты, ломающие ось.

Сравним полученную нами здесь реакцию оси с той, которую мы получили, исследуя влияние вне осевого положения центра тяжести тела. Когда центр тяжести не совпадает с осью вращения тела, то мы получаем центробежную силу, которая тоже стремится согнуть или сломать ось, но при этом силы, передающиеся на обе опоры, или на оба подшипника, всегда направлены *одинаково* (рис. 48), между тем как в рассмотренном нами здесь случае, когда ось не совпадает ни с одной из главных осей инерции тела, силы, действующие на обе опоры, равны и *противоположны*; на ось вращения, на подшипники и на весь фундамент машины действует пара сил (рис. 49), которая сообщает им качения вокруг оси, перпендикулярной к оси вращения.

Нетрудно видеть, что ломающий момент можно рассматривать тоже как действие центробежных сил. Представим себе тело  $AB$  (рис. 49), вращающееся вокруг оси  $NN$ . Мы можем рассматривать это тело как состоящее из двух половин  $A$  и  $B$  с центрами тяжести  $C_a$  и  $C_b$ , которые не лежат на оси вращения, хотя центр тяжести всего тела  $C$  и лежит на оси вращения. При вращении у нас получатся две центробежные силы  $F_a$  и  $F_b$ , образующие *пару сил*, ломающую ось; момент этой пары перпендикулярен к оси. Только в том случае, когда расположение масс обладает некоторою симметрией и центры тяжести обеих половин тела приходятся на одной и той же нормали к оси, плечо обеих центробежных сил делается равным нулю и ломающий момент пропадает. Но это

требование равносильно тому, чтобы ось вращения совпадала с одной из главных осей инерции тела.

Бывают случаи, когда моменты, ломающие ось, неизбежны; например, когда две машины приводят во вращение одну и ту же ось (рис. 50) и точки приложения сил расположены по сторонам, противоположным относительно оси. Массы  $M_1$  и  $M_2$  (рис. 50) образуют момент (перпендикулярный к рис. 50), ломающий ось. В подобных случаях помещают на той же оси еще добавочные массы  $M_3$ , расположенные таким образом, чтобы образующие ими центробежные силы давали момент равный и противоположный массам  $M_1$  и  $M_2$ . Правда, при таком добавлении масс, ломающие моменты не устраняются совершенно, но они делаются симметричными по своему расположению и, образуя в *совокупности* своей момент равный нулю, не производят сотрясения подшипников и фундамента.

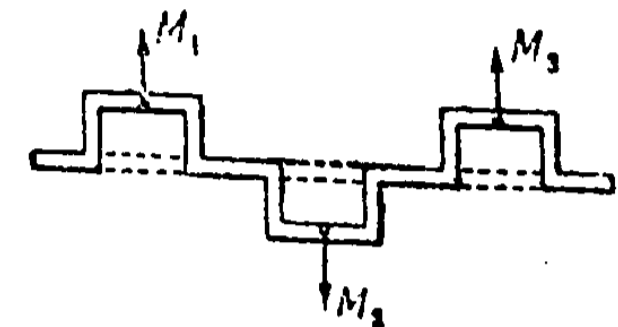


Рис. 50. Уравновешивающие массы.

Уравновешивающие массы читатель может заметить на осях локомотивов и в корабельных машинах.

67. Упругая ось (предварительный подсчет). В прежнее время старались избегать больших скоростей вращения в машинах из опасения, что даже при небольшой асимметрии в расположении масс, которая неизбежна даже при самой тщательной выделке, возникнут опасные центробежные силы. И действительно, при очень больших скоростях весь остов машины приходит в сильное сотрясение. Однако Лаваль (инженер по постройке турбин) заметил, что эти сотрясения увеличиваются только до известного предела быстроты вращения турбины и что при переходе через этот предел, т. е. при еще большей скорости вращения, турбина идет спокойнее. Явление Лавала было объяснено Фёпплем (1895) и другими учеными. Оказывается, что это явление обусловлено *гибкостью* оси турбины, причем при известной скорости вращения наступает особого

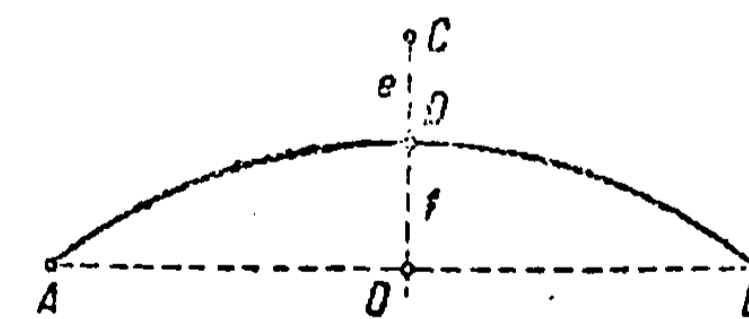


Рис. 51. Упругая ось вращения.

рода резонанс, когда амплитуда колебаний машины делается *наибольшей*; при переходе через этот резонанс амплитуды колебаний *быстро уменьшаются*. Так как явление Лавала представляет интерес не только с технической, но и с чисто научной точки зрения, то нам необходимо на нем остановиться.

Пусть прямая  $AOB$  (рис. 51) представляет ось турбины во время ее покоя. Во время вращения вследствие несовершенного совпадения центра тяжести  $C$  с осью вращения возникнет центробежная сила, которая будет выгибать ось. Положим, что выгнутая ось займет положение  $ADB$  (на рисунке сильно преувеличенное). Обозначим через  $f$  отклонение середины оси (где надета турбина) от положения покоя, через  $e$  — расстояние центра тяжести от оси и через  $l$  — расстояние центра тяжести

от точки  $O$ . Если мы пересечем турбину плоскостью, перпендикулярной к оси и проходящей через ее середину, то получим рис. 52. Здесь точка  $O$  означает положение середины оси во время покоя,  $D$  — положение ее во время вращения и  $C$  — центр тяжести турбины. Для предварительного подсчета мы предположим, что все три точки  $O$ ,  $D$ ,  $C$  находятся на одной прямой (как на рис. 52); при более

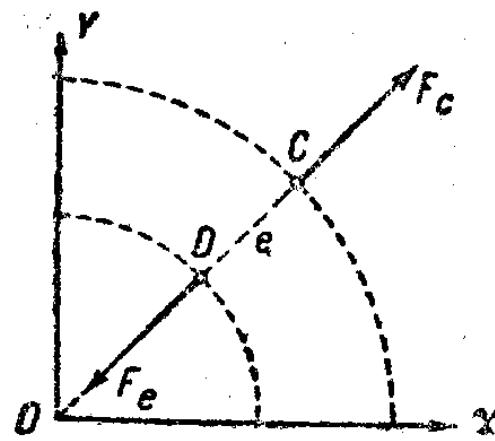


Рис. 52. Предварительный расчет упругой оси вращения.

подробном исследовании мы откинем это предположение. При вращении турбины точки  $D$  и  $C$  будут описывать окружности радиусов  $f$  и  $r$  вокруг точки  $O$ ; в то же время точка  $C$  будет описывать окружность радиуса  $e$  вокруг точки  $D$ .

На турбину будут действовать две силы:

Во-первых, центробежная сила, или сила инерции, направленная по радиусу-вектору  $r$  и равная  $F_c = mr\omega^2$ , и, во-вторых, сила упругости пружины, направленная от середины оси  $D$  к центру  $O$ . Эту силу можно положить пропорциональной стреле прогиба  $f$  турбины:

$$F_e = -bf = -b(r - e).$$

Знак минус мы поставили потому, что сила эта направлена противоположно вектору  $f$ ; введенный нами коэффициент пропорциональности будет зависеть от материала оси, от ее поперечного сечения и от расстояния между опорами.

Если скорость вращения турбины постоянна, то между этими двумя силами наступает равновесие, и мы можем написать:

$$mr\omega^2 - b(r - e) = 0,$$

откуда определяется расстояние центра тяжести от точки  $O$ :

$$r = \frac{be}{b - m\omega^2}.$$

Здесь удобно будет ввести обозначение:

$$\frac{b}{m} = a^2; \quad a = \pm \sqrt{\frac{b}{m}}.$$

Эта величина представляет собою не что иное, как частоту колебания упругой оси с насаженной на ней турбиной в то время, когда она еще не приведена во вращение (ср. ч. II, стр. 99, 71, рис. 34). При таком обозначении мы получим для стрелы прогиба оси формулу:

$$f = r - e = \left[ \frac{a^2}{a^2 - \omega^2} - 1 \right] e.$$

Эта формула показывает нам, что пока турбина еще не вращается ( $\omega = 0$ ), прогиб  $f$  равен нулю (как это и должно быть), но затем с увеличением угловой скорости вращения  $\omega$  прогиб сильно увеличивается (очевидно, вследствие появления центробежной силы). При  $\omega = a$  прогиб даже делается бесконечно большим, т. е. ось турбины должна сломаться.

Однако если бы нам удалось перейти через эту критическую скорость, то при дальнейшем увеличении быстроты вращения ( $\omega > a$ ) стрела прогиба будет уменьшаться. Но это и означает, что при очень больших скоростях турбина будет работать спокойнее, как это и заметил Лаваль.

68. Упругая ось (более подробное исследование). Однако при таком толковании явления Лавала некоторые пункты остаются неясными, и их нужно рассмотреть подробнее.

Прежде всего является вопрос: каким образом можно перейти через критическую скорость вращения без поломки оси турбины? Ответом на этот вопрос служит нам общая теория резонанса (ч. II, стр. 110, 78, 79). Теория всегда дает бесконечно большие амплитуды колебаний, при совершенном отсутствии трения. Но в действительности трение или какая-либо другая причина, поглощающая энергию колебаний, неизбежны, и амплитуда колебаний не будет увеличиваться так сильно. Кроме того, даже эти большие амплитуды резонанса не устанавливаются моментально, а требуют некоторого времени для *раскачивания* (ср. ч. II, стр. 113, 79). И действительно практика показывает, что быстрый переход через критическую скорость вращения без поломки оси вполне возможен. Наконец, можно сконструировать особые приспособления, предупреждающие возможность опасных прогибов.

Второй пункт, который нам необходимо выяснить, заключается в следующем. Положим, что нам удалось благополучно перейти через критическую скорость; тогда наша формула дает нам при  $\omega > a$  коэффициент при  $e$  отрицательный. Это означает, что расстояние  $r$  делается меньше  $f$  (рис. 53), т. е. центр тяжести турбины  $C$  располагается *ближе* к линии оси  $O$ , чем середина согнутой оси  $D$ . Но если это так, то при малейшем отклонении одной из указанных точек образуется момент сил  $F_c$  и  $F_e$ , который тотчас же переведет центр тяжести снова наружу. Другими словами, положение центра оказывается неустойчивым.

Такой парадоксальный результат получился у нас отчасти потому, что мы с самого начала приняли, что векторы  $OC$  и  $OD$  имеют одинаковое направление, но главным образом потому, что мы имеем здесь случаи динамического равновесия (равновесие движения) и вопрос об устойчивости принимает несколько иную форму. Для большей ясности мы произведем наш расчет еще раз, откинув предположение, что точки  $O$ ,  $D$ ,  $C$  расположены на одной прямой, и введя в уравнения движения силу трения.

Проведем оси декартовых координат  $Ox$  и  $Oy$  с началом в точке  $O$  несогнутой оси (рис. 54) и пусть векторы  $r$  и  $e$  образуют с осью  $Ox$  углы  $\alpha$  и  $\beta$ . Когда центр тяжести  $C$  будет равномерно вращаться вокруг оси турбины с угловой скоростью  $\omega$ , то угол  $\beta$  будет равномерно расти, и мы можем положить:

$$\beta = \omega t.$$

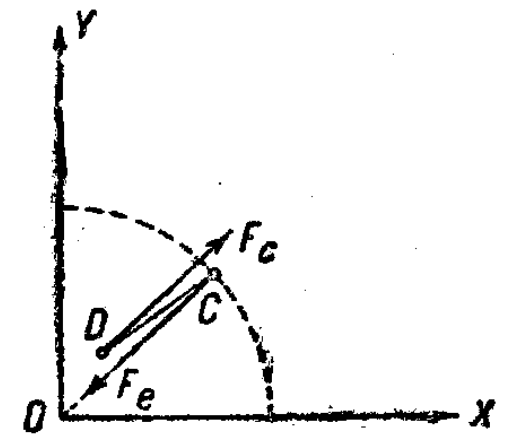


Рис. 53. Предварительный расчет упругой оси вращения.

На турбину действуют следующие силы: во-первых, центробежная сила  $m\ddot{r}$ , приложенная к центру тяжести; затем сила трения, которую мы положим пропорциональной расстоянию  $r$  центра тяжести от начала. Не желая входить в детали конструкции турбины, мы можем оставить коэффициент пропорциональности  $c$  неопределенным:

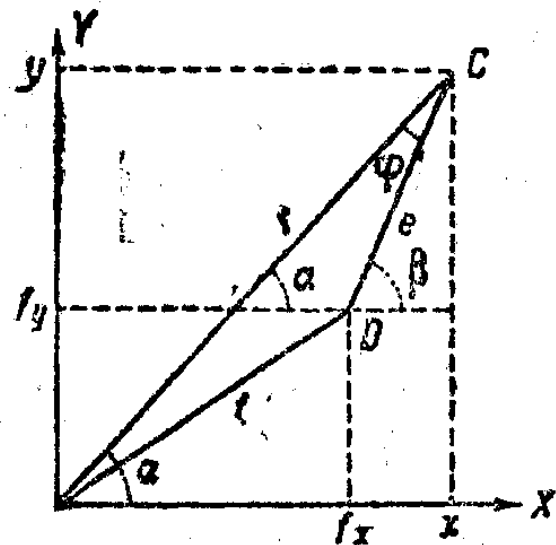


Рис. 54. Явление резонанса в упругой оси вращения.

$$F_r = -cr.$$

Наконец, на ось турбины действует сила упругости оси, которую, как и раньше, мы положим пропорциональной стреле прогиба:

$$F_e = -bt.$$

При составлении уравнения импульсов мы должны все силы считать приложенными к центру тяжести турбины и получаем:

$$m\ddot{r} + cr + bt = 0.$$

Проектируя это уравнение на оси координат, мы можем записать (ср. рис. 54):

$$f_x = x - e \cos(ut); \quad f_y = y - e \sin(ut)$$

и тогда получаем два уравнения:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + cx + bx &= be \cos(ut); \\ m\ddot{y} + cy + by &= be \sin(ut). \end{aligned}$$

Подобные уравнения нам уже встречались в теории вынужденных колебаний, и мы можем прямо написать их решения в следующей форме (ч. II, стр. 107, 77, 78):

$$x = r \cos \alpha = r \cos(ut - \varphi); \quad y = r \sin \alpha = r \sin(ut - \varphi);$$

$$r = \frac{cb}{\sqrt{(1-z^2)^2 + (qz)^2}}; \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{qz}{1-z^2}.$$

При этом мы ввели следующие обозначения:

$$z = \frac{u}{a}; \quad q = \frac{ca}{b}; \quad a = \sqrt{\frac{b}{m}}.$$

Из этих формул мы можем вывести целый ряд следствий, которые дадут нам общую картину явления.

1) При вращении турбины на оси  $ADB$  центр тяжести  $C$  должен описывать круги радиуса  $e$  вокруг точки  $D$  оси. Однако сама точка  $D$ , в свою очередь, описывает круги радиуса  $f$  вокруг начала  $O$ , потому что стрела прогиба остается при равномерной скорости вращения  $u$  постоянной. Наконец, и центр тяжести  $C$  тоже описывает круги постоянного радиуса вокруг точки  $O$ , потому что и величина  $r$  при постоянной скорости вращения тоже неизменна.

2) Наши уравнения, как мы уже указали, имеют вид уравнений вынужденных колебаний точки, и угол  $\varphi$  играет в них роль *разности фаз* между колебаниями действующей силы (правые части уравнений) и колебаниями точек ( $x$  и  $y$ ). Но в действительности мы имеем не колебания, а вращения вокруг оси  $O$ ; а наши уравнения представляют собой один из примеров *разложения* равномерно-вращательного движения на два взаимно перпендикулярных гармонических колебания (ср. ч. II, стр. 136, ис. 59, 91). Поэтому  $\varphi$  на самом деле представляет величину угла, образуемого векторами  $e$  и  $r$ , как это видно из самого рис. 54 и из наших формул:

$$\varphi = \beta - \alpha.$$

3) Итак, величины  $\varphi$ ,  $r$ ,  $f$  остаются при равномерном вращении турбины постоянными, но для различных скоростей вращения  $u$  они будут, вообще говоря, различными. При скоростях  $u$ , *меньших* критической скорости  $a$  (ниже резонанса), угол  $\varphi$  будет острым (рис. 54) и центр тяжести  $C$  будет описывать круг *большого* радиуса, чем точка  $D$  оси; наоборот, при скоростях *выше* критической угол  $\varphi$  будет тупой (рис. 55), и центр  $C$  будет описывать круг *меньшего* радиуса, чем точка  $D$ . Что же касается величин  $r$  и  $f$ , то они будут изменяться в зависимости от  $u$  точно так же, как изменяется амплитуда колебаний при изменении частоты колебаний действующей силы.

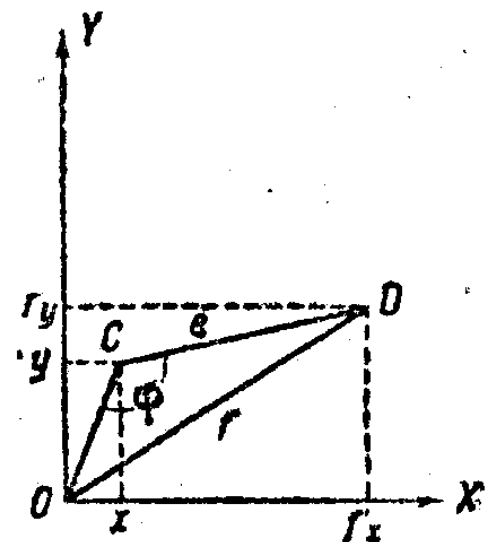


Рис. 55. Явление резонанса в упругой оси вращения.

69. Вопрос об устойчивости движения. Нам остается еще выяснить вопрос, почему две силы: с одной стороны, центробежная сила  $F_r$ , и, с другой стороны, сила упругости пружины  $F_e$ , образующие, как мы теперь видим, всегда некоторый *момент* при любой скорости вращения турбины, не переводят центр тяжести  $C$  за точку  $D$ , подальше от центра вращения, как это показано у нас на рис. 52.

Ответ на этот вопрос мы имеем в наших уравнениях движения, где центробежная сила представлена членами  $m\ddot{x}$  и  $m\ddot{y}$ , и эта сила уравновешивается не только силой упругости, но также и силой трения  $F_r$ . Все эти силы вместе образуют замкнутый векторный четырехугольник (ср. ч. II, стр. 109 рис. 39 и стр. 110, рис. 40; 77) и, следовательно, в каждый момент времени находятся в равновесии.

Мы можем исследовать устойчивость рассматриваемого движения другим способом (см. ч. II, стр. 305, 209). Представим себе, что мы отклоним рассматриваемую систему от того стационарного движения, которое мы получили из наших уравнений, т. е. представим себе, что мы сообщим турбине толчок, изменяющий угол  $\varphi$  при неизменной скорости  $u$ , и спросим себя, каково будет дальнейшее движение? Но при изменении угла  $\varphi$  координаты  $x$  и  $y$  изменятся тоже на некоторые величины  $\delta x$  и  $\delta y$ , и наши уравнения изменятся в следующие:

$$\begin{aligned} m(\ddot{x} + \delta\ddot{x}) + c(x + \delta x) + b(x + \delta x) &= be \cos(ut); \\ m(\ddot{y} + \delta\ddot{y}) + c(y + \delta y) + b(x + \delta x) &= be \sin(ut). \end{aligned}$$

Вычтя из этих уравнений наши основные уравнения, мы получаем:

$$m \delta \ddot{x} + c \delta \dot{x} + b \delta x = 0;$$

$$m \delta \ddot{y} + c \delta \dot{y} + b \delta y = 0.$$

Как видим, величины  $\delta x$  и  $\delta y$  будут совершать затухающие гармонические колебания (ср. ч. II, стр. 102, 73). Но это и означает, что рассмотренное нами движение с постоянным углом  $\varphi$  обладает *устойчивостью*.

## ГЛАВА ПЯТАЯ

### ВРАЩЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКИ

70. Уравнения Эйлера. Переходя к изучению явлений вращения твердого тела вокруг неподвижной точки, мы прежде всего преобразуем общее уравнение моментов:

$$\dot{\mathbf{K}} = \mathbf{M}.$$

Разложим вектор  $\dot{\mathbf{K}}$ , т. е. изменение вектора  $\mathbf{K}$  со временем, на две части: на изменение по отношению к материальным точкам самого вращающегося тела, — это изменение мы обозначим через  $\mathbf{K}'$ , и на изменение вектора  $\mathbf{K}$ , которое обусловлено только вращением. Это последнее изменение, как это мы уже неоднократно выясняли, равно  $[\mathbf{uK}]$  (ср. ч. I, стр. 41, 42, ч. II, стр. 201, 132; ч. III, стр. 93, 64). Итак,

$$\dot{\mathbf{K}} = \mathbf{K}' + [\mathbf{uK}] = \mathbf{M}$$

Представим себе во вращающемся теле систему декартовых координат  $OXYZ$ , неизменно связанную с телом и, следовательно, вращающуюся вместе с ним. Начало этих координат мы возьмем в неподвижной точке тела (вокруг которой тело вращается и через которую все время проходит ось вращения тела; при этом, однако, направление оси вращения может изменяться со временем), а сами оси направим по *главным* осям инерции тела относительно этой точки. Обозначив проекции угловой скорости вращения  $\mathbf{u}$  на эти (вращающиеся) координаты через  $p, q, r$ , обычно принятые обозначения, мы можем написать для проекций момента импульса на эти оси:

$$K_x = Ap; \quad K_y = Bq; \quad K_z = Cr.$$

Так как величины  $A, B, C$  остаются по отношению к выбранным нами осям постоянными, то производные по времени момента импульса будут:

$$\dot{K}_x = A\dot{p}; \quad \dot{K}_y = B\dot{q}; \quad \dot{K}_z = C\dot{r}.$$

Далее, вектор  $[\mathbf{uK}]$  будет иметь проекциями:

$$\begin{aligned} [\mathbf{uK}]_x &= u_y K_z - u_z K_y = q \cdot Cr - r \cdot Bq = -(B - C)qr; \\ [\mathbf{uK}]_y &= u_z K_x - u_x K_z = r \cdot Ap - p \cdot Cr = -(C - A)rp; \\ [\mathbf{uK}]_z &= u_x K_y - u_y K_x = p \cdot Bq - q \cdot Ap = -(A - B)pq; \end{aligned}$$

Таким образом уравнения моментов у нас напишутся в виде:

$$M_x = A\dot{p} - (B - C)qr,$$

$$M_y = B\dot{q} - (C - A)rp,$$

$$M_z = C\dot{r} - (A - B)pq.$$

Эти уравнения были впервые получены Эйлером (1760).

Обращаем внимание читателя на то обстоятельство, что в этих уравнениях все проекции векторов (включая и вектор момента сил  $\mathbf{M}$ ) отнесены к *подвижным* осям координат, неизменно связанным с вращающимся телом.

71. Решение уравнений Эйлера при отсутствии внешних моментов. Если угловые скорости вращения тела и их изменения со временем известны, то по уравнениям Эйлера мы легко можем определить моменты действующих сил, но обратная задача — по данным моментам определить движение тела — представляет значительные математические трудности и решена только в немногих частных случаях.

Если на тело не действуют никакие внешние моменты, то уравнения Эйлера принимают более простой вид:

$$\dot{p} = \frac{B - C}{A} qr;$$

$$\dot{q} = \frac{C - A}{B} rp;$$

$$\dot{r} = \frac{A - B}{C} pq,$$

и могут быть решены в конечной форме эллиптическими функциями. Обозначим через  $p_0, q_0, r_0$  значения угловых скоростей в начальный момент времени  $t = 0$  и выберем этот момент так, чтобы  $q_0 = 0$ ; тогда угловые скорости в последующие моменты могут быть выражены формулами:

$$p = p_0 \operatorname{dn} \sigma(t - t_0);$$

$$q = \varepsilon \operatorname{sn} \sigma(t - t_0);$$

$$r = r_0 \operatorname{cn} \sigma(t - t_0),$$

в которых  $\operatorname{dn}, \operatorname{sn}, \operatorname{cn}$  суть символы эллиптических функций (они нам встречались при исследовании колебаний в ч. II, стр. 163, 107, рис. 77), а постоянные  $\sigma$  и  $\varepsilon$ , а также и величина модуля  $k$  эллиптических функций выражаются формулами:

$$\sigma^2 = p_0^2 \frac{A - C}{B} \cdot \frac{A - B}{C};$$

$$\varepsilon^2 = r_0^2 \frac{C}{B} \cdot \frac{A - C}{A - B};$$

$$k^2 = \left( \frac{r_0}{p_0} \right)^2 \frac{C}{A} \cdot \frac{B - C}{A - B}.$$

Заметим, что, для того чтобы эти величины были реальны, необходимо выбрать координаты так, чтобы

$$A > B > C$$

или чтобы

$$A < B < C,$$

что всегда возможно.

Если распределение масс в теле обладает некоторой симметрией, причем моменты инерции  $B$  и  $C$  одинаковы, то и модуль делается равным нулю и эллиптические функции превращаются в круговые. Подобные случаи мы разберем ниже, независимо от общей формы решения уравнений.

72. Изменение направления оси при вращении по инерции. Рассмотрим несколько подробнее случай вращения тела по инерции, но так как аналитическая форма решений уравнений Эйлера (в виде эллиптических функций) не обладает достаточной наглядностью, то обратимся к самим уравнениям.

Если момент внешних сил равен нулю, то

$$\mathbf{K} = 0; \quad \mathbf{K} = \text{const},$$

т. е. момент импульса (по отношению к неподвижному пространству) остается неизменным. Но момент импульса относительно осей, проведенных во вращающемся теле

$$\mathbf{K}' = -[\mathbf{u}\mathbf{K}],$$

не остается постоянным, а потому и угловая скорость вращения  $\mathbf{u}$  тоже должна изменяться. Предположим, например, что в некоторый момент времени  $t$  проекция  $p_0$  угловой скорости на ось инерции  $OX$  была равна нулю, тогда как  $q_0$  и  $r_0$  не равны нулю; это означает, что тело в этот момент вращалось вокруг оси, лежащей в плоскости  $YZ$ . Тогда первое уравнение Эйлера:

$$p = \frac{B - C}{A} qr, \quad \text{при } p_0 = 0$$

показывает нам, что тело *начинает* вращаться и вокруг оси  $OX$ . Точно так же, если ось вращения в некоторый момент времени находилась в плоскости  $ZX$  или в плоскости  $XY$ , то уже в следующий за этим момент появляются вращения вокруг осей, перпендикулярных к этим плоскостям. Таким образом, несмотря на то, что на тело не действуют никакие внешние силы и оно вращается, так сказать, *по инерции*, тем не менее оно не сохраняет направления своей оси вращения постоянным; ось вращения движется в теле, проходя в различные моменты времени через различные материальные точки твердого тела. Только точка  $O$ , через которую должна проходить ось вращения во все моменты времени, остается неизменной; отсюда заключаем, что ось вращения описывает в теле некоторую *коническую поверхность*.

Впрочем, в некоторых частных случаях направление оси вращения в теле может оставаться постоянным. Так, например, если вращение по инерции происходит вокруг одной из трех главных осей инерции (следовательно,

вокруг одной из выбранных нами осей координат), то направление оси остается постоянным. Пусть, например,

$$p_0 = 0; \quad q_0 = 0; \quad r_0 \neq 0,$$

тело вращается вокруг оси  $OZ$ . Тогда уравнения Эйлера дают:

$$\dot{p} = 0; \quad \dot{q} = 0; \quad \dot{r} = 0,$$

и по начальным данным:

$$p = 0, \quad q = 0; \quad r = \text{const} = r_0.$$

Другой частный случай мы имеем, когда тело обладает симметрией, и два момента инерции одинаковы, например,  $B = C$ ; в таком случае

$$\dot{p} = 0; \quad p = \text{const}.$$

Впрочем, при  $B = C$  и направлении главных осей инерции  $OY$  и  $OZ$  делается неопределенным (в эллипсоиде вращения тоже направление двух осей неопределенно).

Еще большую свободу мы имеем в случае, когда  $A = B = C$ ; тогда вращение по инерции вокруг любой оси тела может оставаться неизменным.

Полезно сравнить полученные нами здесь результаты с теми, которые мы имели при вращении тела вокруг данной неподвижной оси (стр. 81, 66). Стремление тела изменить направление оси вращения обнаруживается здесь появлением моментов, *ломающих ось*.

73. Движение оси в теле. Мы можем пойти несколько дальше и составить себе некоторое представление о том, как изменяется *направление* оси вращения тела при отсутствии моментов внешних сил.

При вращении тела по инерции две величины остаются постоянными, а именно:

1) кинетическая энергия вращающегося тела

$$2T = Ap^2 + Bq^2 + Cr^2;$$

2) момент импульса вращающегося тела

$$K^2 = A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2.$$

Что же касается угловой скорости вращения

$$u^2 = p^2 + q^2 + r^2,$$

то проекции ее на оси координат (вращающиеся вместе с телом)  $p, q, r$  могут изменяться со временем, и в большинстве случаев, как это мы уже выяснили, они будут изменяться, удовлетворяя, однако, вышенаписанным двум уравнениям. Эти уравнения мы можем рассматривать как уравнения двух эллипсоидов с центрами в начале координат, радиусы-векторы которых имеют проекциями на оси координат:

$$x = p; \quad y = q; \quad z = r.$$

Уравнения этих двух эллипсоидов можно написать в форме:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

причем для эллипсоида энергии мы получим полуоси:

$$a_e = \sqrt{\frac{2T}{A}}; \quad b_e = \sqrt{\frac{2T}{B}}; \quad c_e = \sqrt{\frac{2T}{C}},$$

а для эллипсоида импульсов получим полуоси:

$$a_i = \frac{K}{A}; \quad b_i = \frac{K}{B}; \quad c_i = \frac{K}{C}.$$

Мы опять предположим, что оси координат у нас выбраны так, что  $A$  (по оси  $OX$ )  $> B$  (по оси  $OY$ )  $> C$  (по оси  $OZ$ ).

В таком случае для эллипсоида энергии и для эллипсоида момента импульса мы получим соотношение между осями *обратное*:

$$a < b < c.$$

Таким образом оба последние эллипсоида (в противоположность эллипсоиду инерции) будут вытянуты по направлению оси  $OZ$ . Нетрудно сообразить, что эллипсоид импульсов всегда *более вытянут*, чем эллипсоид энергии. Действительно, из соотношений:

$$\frac{c_e}{a_e} = \sqrt{\frac{A}{C}}; \quad \frac{c_i}{a_i} = \frac{A}{C},$$

при  $A > C$ , мы заключаем, что

$$\frac{c_i}{a_i} > \frac{c_e}{a_e}.$$

Это соображение нам сейчас пригодится.

Величины  $p, q, r$ , которые должны удовлетворять уравнениям *обоих* эллипсоидов одновременно, определяются, очевидно, линией пересечения *обоих* эллипсоидов; отсюда заключаем, что вектор угловой скорости и при изменении своего направления должен все время скользить по этой линии пересечения. Каковы же будут эти линии? Для выяснения этого рассмотрим следующие характерные случаи.

Предположим сначала, что эллипсоид энергии и эллипсоид момента импульсов касаются друг друга на оси  $OX$ , и следовательно,

$$a_e = a_i; \quad b_e < b_i; \quad c_e < c_i;$$

при этом:

$$2TA = K^2.$$

Так как эллипсоид импульсов более вытянут, то он будет весь находиться *снаружи* эллипсоида энергии, причем вращение тела будет происходить вокруг оси  $OX$ . Теперь предположим, что телу сообщен небольшой толчок и его эллипсоид импульсов несколько изменился. Так как  $a_i$  не может сделаться больше  $a_e$ , то это изменение может произойти только в том смысле, что эллипсоид импульсов делается *уже* эллипсоида энергии и мы получим пересечение *обоих* эллипсоидов по некоторой линии *aa* (рис. 56).

Следовательно, после небольшого толчка, при дальнейшем вращении тела ось вращения и будет описывать небольшой конус вокруг первоначальной оси вращения  $OX$ . Такое движение вокруг оси  $OX$  нужно считать *устойчивым*.

Такой же результат мы получим, если предположим, что тело первоначально вращалось вокруг оси  $OZ$  (ось наименьшего момента инерции).

Для этого случая мы имеем:

$$a_e > a_i; \quad b_e > b_i; \quad c_e = c_i; \\ 2TC = K^2.$$

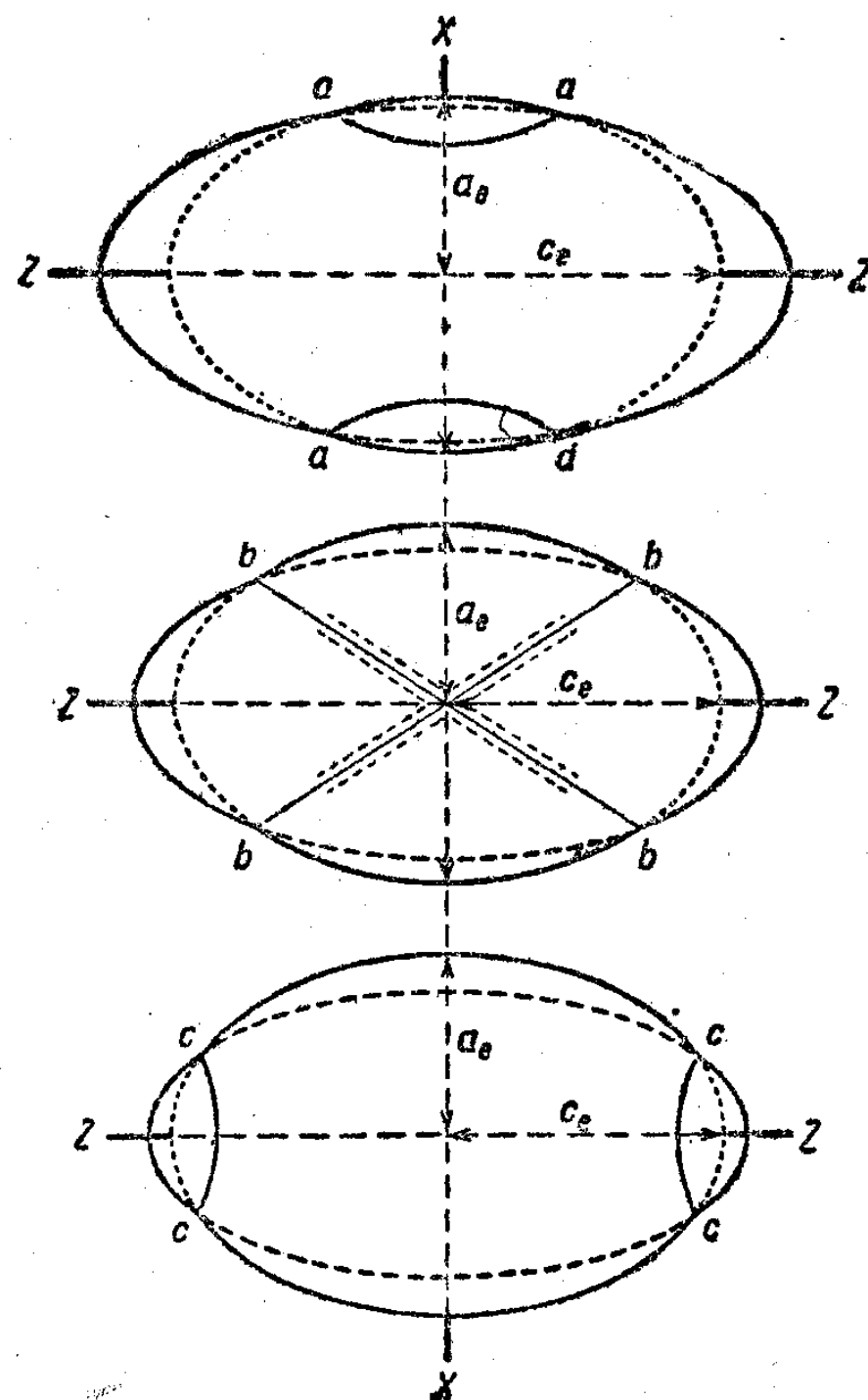


Рис. 56, 57 и 58. Пересечение эллипсоида энергии с эллипсоидом момента импульса.

Действительно, в этом случае мы имеем условия:

$$a_e > a_i; \quad b_e = b_i; \quad c_e < c_i$$

и оба рассматриваемые эллипсоида не только будут иметь общую точку касания на оси  $OY$  (рис. 57), но, кроме того, будут пересекаться друг с другом по кривым  $bb$  и  $bb$ . При небольшом (даже случайном) толчке взаимное касание эллипсоидов прекратится, и они будут пересекаться друг с другом по кривым, близким к линиям  $bbbb$ . Но из рис. 57 мы видим, что эти новые кривые пересечения эллипсоидов (оставаясь близкими к старым кривым  $bb$ ) будут огибать или ось  $OX$  или ось  $OZ$

Эллипсоид импульсов будет находиться целиком *внутри* эллипсоида энергии (рис. 58). При небольшом толчке полюсь  $c_i$  делается больше полюсь  $c_e$  (меньше она быть не может), эллипсоид момента импульса немного высунется наружу эллипсоида энергии, и оба эллипсоида будут пересекаться друг с другом по некоторой линии  $cc$ , огибающей ось  $OZ$ . По этой линии и должна будет скользить ось вращения тела после толчка, она будет описывать небольшой конус вокруг оси  $OZ$ . Как видим, вращение тела вокруг оси  $OZ$  тоже нужно считать *устойчивым*.

Нечто иное мы получим, если тело вращалось первоначально вокруг оси  $OY$  (ось среднего момента инерции). Такое вращение, вообще говоря, возможно без изменения направления оси вращения, однако, оно будет *неустойчивым*.

(смотря по направлению случайного толчка), но никоим образом не могут огибать оси первоначального вращения  $OY$ . Так как по этим кривым должна будет двигаться после толчка ось вращения и, то она будет описывать конус *большого* отверстия вокруг оси  $OX$  или вокруг оси  $OZ$  и при этом сильно и быстро *отклоняться* от оси  $OY$ . На этом основании вращение вокруг оси  $OY$  *нельзя считать устойчивым*.

На рис. 59 изображен эллипсоид энергии и на поверхности его намечены различные типы линий пересечения его с эллипсоидом импульсов. Линии эти называются *полюдиями* (см. § 75).

74. Теорема Пуансо. В предыдущем параграфе мы выяснили, каким образом будет изменяться направление оси вращения *внутри тела*, т. е. по отношению к материальным точкам самого вращающегося тела. Для того чтобы выяснить, каково будет движение этой оси относительно *внешнего* неподвижного пространства, мы прибегнем к геометрическому толкованию этого явления, найденному Пуансо.

Напомним читателю соотношение между кинетической энергией вращения тела и моментом импульса его (стр. 24, 19):

$$K \cos \alpha = \frac{\partial T}{\partial p}; \quad K \cos \beta = \frac{\partial T}{\partial q}; \quad K \cos \gamma = \frac{\partial T}{\partial r}.$$

Но если мы будем рассматривать выражение

$$2T = Ap^2 + Bq^2 + Cr^2$$

как уравнение эллипсоида, радиус-вектор которого есть  $u$ , то  $\alpha, \beta, \gamma$  будут представлять углы, образуемые нормалью к поверхности этого эллипсоида с осями координат  $OX, OY, OZ$ ; нормаль эта проведена в той точке поверхности эллипсоида, через которую проходит в рассматриваемый момент вектор  $u$ . Это, между прочим, непосредственно следует также из того обстоятельства, что соотношение между векторами  $K$  и  $u$  представляет собой *симметричный тензор*, а выражение энергии служит им тензорным эллипсоидом (ср. стр. 24, 19; ч. I, стр. 155, рис. 113; 136).

Далее мы знаем, что величина  $2T$  представляет собой скалярное произведение вектора угловой скорости  $u$  на вектор момента импульса  $K$  (стр. 23, 18):

$$2T = uK = uK \cdot \cos(uK) = uK \cos \beta,$$

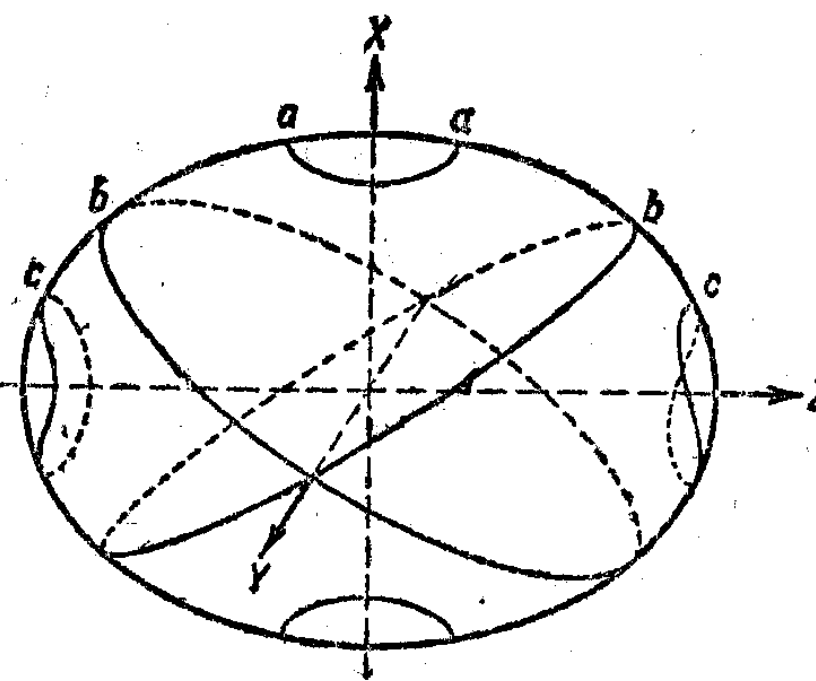


Рис. 59. Эллипсоид энергии и полюдии.

где  $\beta$  означает угол между векторами  $u$  и  $K$ . Но в рассматриваемом случае, т. е. при вращении тела по инерции, величины  $K$  и  $2T$  остаются постоянными; следовательно, и величина

$$h = u \cos \beta = \frac{2T}{K}$$

тоже будет оставаться постоянной. Но эта величина представляет собой не что иное, как перпендикуляр, опущенный из центра  $O$  на плоскость, касательную в той точке эллипсоида энергии, через которую в данный момент проходит вектор  $u$ , т. е. мгновенная ось вращения.

Все только что указанные условия, которые должны быть соблюдены при вращении твердого тела вокруг неподвижной точки без действия внешних сил (по инерции), можно реализовать на следующем геометрическом примере, придуманном Пуансо.

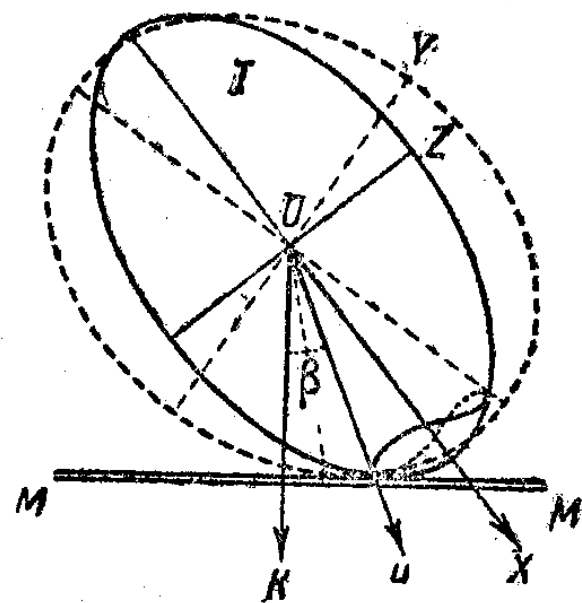


Рис. 60. Разрез. Эллипсоид Пуансо.

Пусть вектор  $K$  (рис. 60) представляет собой момент импульса вращающегося тела; этот вектор остается и по величине и по своему направлению в пространстве постоянным. Далее, пусть  $T$  представляет положение эллипсоида энергии тела в некоторый момент времени. Проведем к этому эллипсоиду касательную плоскость  $MM$ , перпендикулярную к направлению  $K$ . Тогда, согласно с вышесказанным, вектор угловой скорости  $u$  должен быть проведен в точку касания

(рис. 60). Теперь представим себе, что эллипсоид  $T$ , оставаясь своим центром на точке  $O$ , катится по неподвижной плоскости  $MM$  без скольжения. При таком движении вектор  $u$  будет все время проходить через точку касания эллипсоида к плоскости  $MM$ , нормаль к эллипсоиду будет всегда параллельна постоянному вектору  $K$  и, наконец, величина  $u \cos \beta$  будет во все время движения оставаться постоянной. Таким образом все указанные выше условия будут соблюдены.

Итак, теорема Пуансо состоит в следующем: движение твердого тела вокруг неподвижной точки при отсутствии внешних моментов сил можно представить в виде качения эллипсоида энергии тела по плоскости, перпендикулярной к вектору момента импульса тела.

75. Полодия и герполодия. Мы видели, что при вращении твердого тела вокруг неподвижной точки  $O$  по инерции вектор угловой скорости  $u$  чертит на поверхности эллипсоида энергии (эллипсоида Пуансо) замкнутую линию (рис. 59). Подобные линии называются *полодиями* (от слов *полюс* и греческого слова *одос* — *путь*; *полодия* — *путь полюса*).

В то же самое время эллипсоид энергии катится по плоскости  $MM$  (рис. 60) и чертит по ней своей точкой касания тоже некоторую кри-

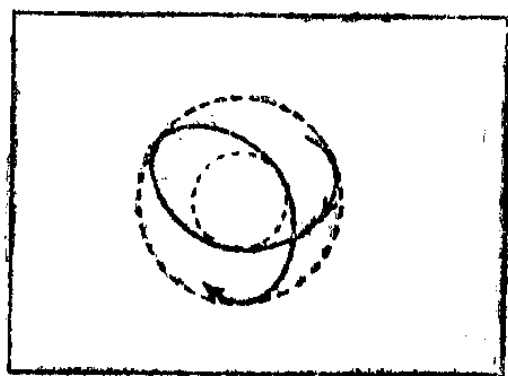


Рис. 61. План. Эллипсоид Пуансо.

вую линию (рис. 61), которая носит название *герполодии* (иногда — *серполодия*, *след полюса*). Герполодия, вообще говоря, не будет представлять собой замкнутую линию, и форма ее сложнее, чем форма положиди. Но нетрудно видеть, что герполодия будет заключаться между двумя концентрическими окружностями (см. рис. 61). Радиус большей окружности мы получим, определив расстояние точки касания эллипсоида от вектора  $K$  в тот момент, когда эллипсоид энергии повернется своей *наименьшей осью* в вертикальную плоскость (на рис. 60 эллипс, изображенный сплошной линией); между тем как радиус меньшей окружности у нас получится, когда эллипсоид энергии повернет свою *среднюю ось* в вертикальную плоскость (на рис. 60 эллипс, изображенный пунктирной линией).

Если мы проведем из неподвижной точки  $O$  лучи ко всем точкам положиди и ко всем точкам герполодии, то получим две конических поверхности, касающиеся друг с другом по одной из образующих; эта образующая служит в то же время мгновенной осью вращения тела. На этом основании мы можем описать движение твердого тела как *качение конуса положиди по конусу герполодии*, причем этот последний конус остается неподвижным в пространстве.

Сказанное мы считаем достаточным для того, чтобы дать понятие о вращении твердого тела вокруг неподвижной точки по инерции, а так как движение это в общем случае все же довольно сложное, то в дальнейшем мы ограничимся более подробным изучением явления вращения только таких твердых тел, эллипсоид инерции которых представляет собой *эллипсоид вращения* с двумя равными полуосями (например  $A = B$ ). В этом случае и эллипсоид энергии (Пуансо) и эллипсоид момента импульса тоже будут эллипсоиды вращения (см. стр. 92, 73), причем все формулы и геометрические соотношения значительно упрощаются. С другой стороны, такие именно случаи чаще всего встречаются на практике.

76. Движение волчка при отсутствии внешних моментов сил. *Волчком* мы будем называть твердое тело, вращающееся вокруг неподвижной точки, у которого два главных момента инерции вокруг точки вращения одинаковы. Мы положим  $A = B$ ; что касается до  $C$ , то оно может быть в некоторых случаях меньше  $A = B$ , и эллипсоид инерции будет *сплюснутый*; если же  $C > A$ , то эллипсоид инерции будет *вытянутый*. В обоих случаях мы имеем *эллипсоиды вращения* с осью симметрии по направлению оси  $C$ .

*Свободным волчком* мы условимся называть волчок, на который не действуют никакие внешние моменты сил. Если волчок находится в поле земного тяготения, то мы должны предположить, что он уравновешен, или укреплен в своем центре тяжести. В таком случае центр тяжести и будет служить той неподвижной точкой, вокруг которой происходит вращение волчка и которую мы принимаем за начало координат.

Уравнения Эйлера для свободного волчка напишутся так (при  $A = B$ ):

$$\dot{p} = + \frac{A - C}{A} q \cdot r.$$

$$\dot{q} = - \frac{A - C}{A} r \cdot p.$$

$$\dot{r} = 0.$$



Эти уравнения легко интегрируются. Последнее уравнение показывает, что проекция угловой скорости  $u$  на ось симметрии  $C$  остается во все время движения постоянной, т. е. той же величины, какая она была в начале движения:

$$r = \text{const.}$$

Приняв это во внимание, мы можем ввести в первые два уравнения постоянную

$$a = \frac{A - C}{A} r.$$

Эта величина тоже представляет собой некоторую угловую скорость вращения вокруг оси  $C$ . Первые два уравнения напишутся теперь так:

$$\dot{p} = +aq; \quad \dot{q} = -ap.$$

Взяв производную по времени от одного из этих уравнений и подставив в другое, мы можем разделить переменные и получаем:

$$\ddot{p} = -a^2 p; \quad \ddot{q} = -a^2 q.$$

Каждое из этих уравнений решается формулами гармонических колебаний, причем величина  $a$  означает частоту этих колебаний, между тем как амплитуда и фаза их зависят от начальных условий. Выберем начало счета времени в тот момент, когда  $q = 0$ . Тогда мы можем написать решения этих уравнений в форме:

$$p = +P \cos at; \quad q = -P \sin at.$$

Нетрудно проверить, что эти формулы удовлетворяют нашим уравнениям. Каково же значение этих формул? Возведя их в квадрат и сложив, получаем:

$$u_{xy} = \sqrt{p^2 + q^2} = P.$$

Это означает, что проекция угловой скорости  $u$  на плоскость  $XU$  остается все время постоянной и равной  $P$ . Разделяя второе выражение на первое, получаем:

$$\frac{q}{p} = \tan \gamma = -\tan at.$$

Это означает, что угол, составляемый направлением  $P$  с осью  $OX$ , не остается постоянным; вектор  $P$  равномерно вращается вокруг начала  $O$  (ср. ч. II, стр. 136, рис. 59, 91): оставаясь в плоскости  $XU$ , угловая скорость этого вращения равна:

$$a = \frac{A - C}{A} r.$$

Выше мы видели, что проекция угловой скорости  $u$  на ось  $OZ$  остается постоянной, теперь мы видим, что проекция вектора  $u$  на плоскость  $XU$

тоже остается постоянной. Отсюда заключаем, что и сам вектор  $u$  остается постоянным по своей величине:

$$u = \sqrt{p^2 + q^2 + r^2} = \sqrt{P^2 + r^2} = \text{const}$$

и угол наклонения этого вектора к оси  $OZ$ , определяемый формулой:

$$\tan a = \frac{P}{r},$$

тоже остается постоянным. Однако *направление* этого вектора не остается постоянным: оно изменяется вместе с направлением  $P$  в плоскости  $XU$ ; это означает, что вектор  $u$  описывает вокруг оси  $OZ$  *круговой конус* с отверстием  $2a$ . Движение это происходит равномерно с угловой скоростью  $a$ . Пересечение этого конуса с поверхностью эллипсоида Пуансо, т. е. полодия, будет окружность круга с центром на оси  $OZ$ ; радиус этого круга будет равен  $P$ .

Теперь перейдем к вектору момента импульса  $K$ ; его проекции на оси координат  $OXYZ$ , неизменно связанные с телом, равны:

$$K_x = Ap; \quad K_y = Aq; \quad K_z = Cr.$$

Эти формулы показывают, что вектор  $K$  ведет себя вполне аналогично вектору  $u$ : его проекции на ось  $OZ$  и на плоскость  $XU$  остаются во все время вращения тела постоянными, и угол, образуемый вектором  $K$  с осью  $OZ$ , определяемый формулой:

$$\tan \vartheta = K_{xy} : K_z = \frac{A}{C} \tan a,$$

тоже во все время вращения остается постоянным. Тем не менее направление вектора  $K$  относительно материальных точек тела не остается постоянным: вектор  $K$  описывает вокруг оси  $OZ$  *круговой конус* с той же угловой скоростью  $a$ , что и вектор  $u$ .

Если углы  $a$  и  $\vartheta$  остаются при вращении тела постоянными, то и угол  $\beta = \vartheta - a$  между векторами  $u$  и  $K$  тоже должен оставаться постоянным. Это мы можем подтвердить двумя способами: во-первых, составив формулы для разности углов  $\vartheta$  и  $a$ , и во-вторых, из соображений о кинетической энергии вращения.

Так как нам пригодятся формулы для синусов и косинусов, то напишем:

$$\sin a = \frac{P}{u}; \quad \cos a = \frac{r}{u};$$

$$\sin \vartheta = \frac{AP}{K}; \quad \cos \vartheta = \frac{Cr}{K}.$$

Отсюда получаем для разности этих углов:

$$\sin \beta = \sin(\vartheta - a) = (A - C) \frac{Pr}{Ku};$$

$$\cos \beta = \cos(\vartheta - a) = \frac{AP^2 + Cr^2}{Ku}.$$

С другой стороны, как известно, кинетическая энергия вращающегося тела может быть представлена как скалярное произведение вектора момента импульса на вектор угловой скорости (стр. 24, 18):

$$2T = (Ku) = Ku \cos \beta.$$

Но кинетическая энергия  $T$  при отсутствии внешних моментов остается постоянной, а выше мы доказали, что величины векторов  $K$  и  $u$  тоже остаются постоянными; отсюда следует, что и угол  $\beta$ , который определяется теперь формулой:

$$\cos \beta = \frac{2T}{Ku},$$

не изменяется со временем. Заметим, что и величина этого угла получилась у нас в согласии с прежним результатом, потому что

$$2T = AP^2 + Cr^2.$$

Резюмируя все это, мы можем сказать, что при движении волчка по инерции величины векторов угловой скорости  $u$  и момента импульса  $K$  и углы их наклона к оси  $OZ$  и друг к другу остаются постоянными; только вся плоскость  $OKu$  равномерно поворачивается вокруг оси  $OZ$  с угловой скоростью  $a$ . Направление этого вращения, а также относительное положение векторов  $u$  и  $K$  в теле зависят от соотношения между моментами инерции тела. Так, например, из формулы

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{A}{C} \operatorname{tg} \alpha$$

мы видим, что при  $A > C$  угол  $\vartheta > \alpha$  (мы предполагаем углы острыми), т. е. вектор  $u$  будет находиться ближе к оси  $OZ$ , чем вектор  $K$ , между тем как при  $A < C$  вектор  $K$  будет ближе к оси  $OZ$ , чем  $u$  (ср. рис. 62 и 63).

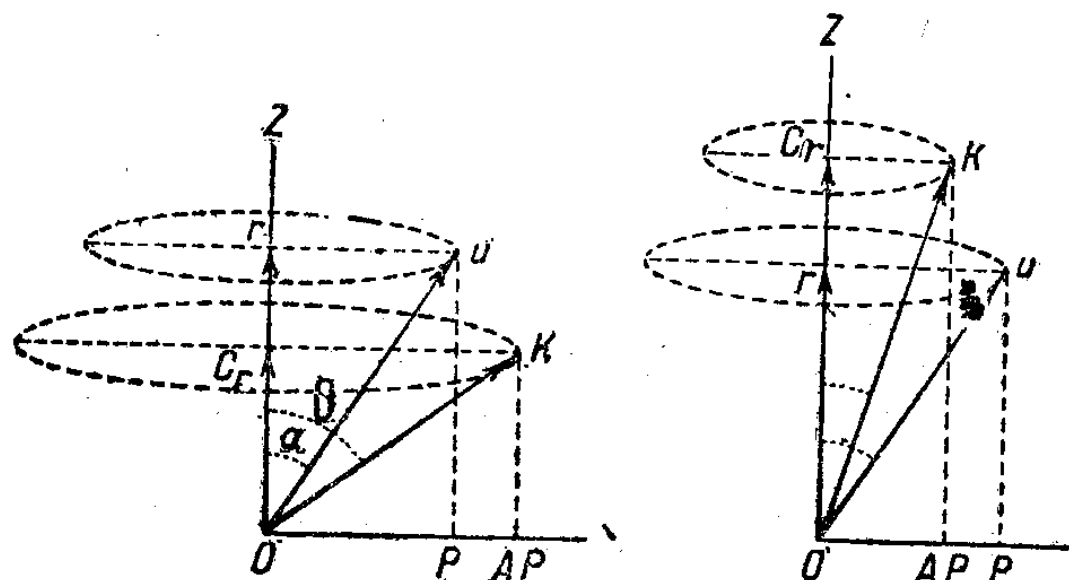


Рис. 62, 63. Движение оси во вращающемся теле.

Далее, из формул

$$\gamma = \text{угол } (XP) = -at, \quad a = \frac{A-C}{A} r$$

читатель легко заключит, что при  $A > C$  вектор  $P$  будет поворачиваться от  $OX$  к  $-OY$ , а с ним и вся плоскость  $OKu$  будет поворачиваться в теле, как показано стрелками на рис. 62. Вектор угловой скорости этого

вращения направлен по оси  $-Z$ . При  $A < C$  мы получаем вращение в противоположную сторону (рис. 63).

77. Вращение волчка относительно внешнего пространства. В предыдущем параграфе мы выяснили все детали движения свободного волчка, относя это движение к осям  $OXYZ$ , неизменно связанным с материальными волчками самого тела. Для того чтобы определить движение по отношению к внешнему неподвижному пространству, нам нужно выбрать какие-либо неподвижные оси координат. Однако благодаря симметрии всего движения нам достаточно выбрать одну ось, а именно, — возьмем для этого направления вектора момента импульса  $K$ , которое, как мы знаем, при движении по инерции остается неподвижным в пространстве. Расположение векторов  $K$ ,  $u$  и оси волчка  $OZ$  друг относительно друга (т. е. углы  $\vartheta$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ) нам уже известно, и нам остается еще определить угловые скорости вращения волчка по отношению к внешнему неподвижному пространству. Мы воспользуемся для этого теоремой Пуансо (стр. 95, 74). По этой теореме движение волчка можно представить как качение эллипсоида энергии (который неизменно связан с телом) по неизменной плоскости  $MM$  (рис. 60), касательной к этому эллипсоиду в точке пересечения его с вектором  $u$ . Но так как в рассматриваемом случае мы имеем дело с эллипсоидом вращения и углы  $\alpha$  и  $\beta$  остаются неизменными, то как полодия, так и герполодия будут круги, а лучи, проведенные из центра эллипсоида к этим кривым, будут образовывать два круговых конуса. Нам удобнее поэтому рассматривать не качение эллипсоида по плоскости, а качение одного кругового конуса (полодии) по другому тоже круговому конусу (герполодии). Конусы эти имеют общую вершину и касаются по одной из образующих, которая в рассматриваемый момент представляет собой мгновенную ось вращения.

Угловую скорость вращения волчка при качении конуса полодии мы обозначим вектором  $a$ , а угловую скорость вращения волчка вокруг оси  $K$  мы обозначим через  $b$ ; эта последняя величина называется прецессией волчка. Для определения величин угловых скоростей вращения волчка и его прецессии мы можем исходить из следующих соображений. На самом деле, тело волчка (конус полодии) в каждый момент поворачивается вокруг своей мгновенной оси  $u$ ; но мы можем рассматривать это движение как составленное из вращения волчка вокруг своей оси (вектор  $a$ ) и вращения волчка вокруг оси вектора момента импульса  $K$  (вектор  $b$ ). Отсюда непосредственно следует, что векторы  $a$ ,  $b$ ,  $u$  должны в каждый момент времени составлять замкнутый треугольник (рис. 68, 69):

$$a + b = u,$$

для которого мы имеем соотношение между сторонами и углами:

$$a : b : u = \sin \beta : \sin \alpha : \sin \vartheta.$$

Так как величина вектора  $u$  и все углы  $\beta$ ,  $\alpha$ ,  $\vartheta$  остаются во время движения неизменными, то и длины сторон  $a$  и  $b$  тоже остаются постоянными. Из приведенных соотношений, приняв во внимание формулы для

синусов углов, которые мы получили в предыдущем параграфе, мы получаем:

$$a = \frac{\sin \beta}{\sin \vartheta} u = \frac{A - C}{A} r;$$

$$b = \frac{\sin \alpha}{\sin \vartheta} u = \frac{K}{A}.$$

Заметим, что величина вектора  $a$  у нас получилась та же самая, что и угловая скорость вращения вектора  $u$  относительно материальных точек тела (стр. 97, 76). Это мы могли предвидеть. Действительно, если вектор  $u$  описывает внутри тела конус с угловой скоростью  $-a$  (полодия), то, когда этот вектор служит мгновенной осью вращения, т. е. когда он остается на мгновение неподвижным в пространстве, все тело должно поворачиваться вокруг этой оси с угловой скоростью  $+a$ . Угловая скорость вращения вектора  $u$  была направлена по оси  $-OZ$  тела, следовательно, угловая скорость вращения волчка относительно внешнего неподвижного пространства, т. е. вектор  $a$ , направлена по оси  $+OZ$  волчка.

Величины  $b$  и  $a$  мы можем определить еще несколько иным способом.

Прежде мы разлагали вектор  $u$  по оси  $OZ$  тела ( $r$ ) и перпендикулярно к этой оси ( $P$ ). Теперь мы разлагаем тот же вектор тоже на две составляющие: одну берем по оси волчка, а другую — по оси вектора  $K$ . Но если мы составим проекции этих последних составляющих опять на ось волчка и на плоскость, перпендикулярную к его оси, то должны получить опять те же величины  $r$  и  $P$ . Сделав это, получаем два уравнения:

$$b \cos \vartheta + a = r; \quad b \sin \vartheta = P.$$

Каждое из этих уравнений позволяет определить величину  $b$  (прецессию волчка), и результат получается в полном согласии с приведенным выше:

$$b = \frac{r - a}{\cos \vartheta} = \frac{Cr}{A \cos \vartheta}; \quad b = \frac{P}{\sin \vartheta} = \frac{Cr}{A \cos \vartheta};$$

$$b = \sqrt{\left(\frac{Cr}{A}\right)^2 + P^2} = \sqrt{\frac{(Cr)^2 + (AP)^2}{A^2}} = \frac{K}{A}.$$

Определив таким образом  $b$ , получим из первого уравнения  $a$ .

Более подробное исследование явления вращения волчка по инерции удобнее и нагляднее будет сделать отдельно для волчков сплюснутых и для волчков вытянутых.

78. Волчок вытянутый. Вытянутым волчком мы условимся называть волчок, момент инерции которого вокруг оси симметрии меньше, чем вокруг осей, перпендикулярных к оси симметрии:

$$A > C.$$

Эллипсоид инерции такого волчка будет сплюснутый, но эллипсоид энергии будет вытянутый (ср. стр. 92, 73). Из соотношения

$$a = \frac{A - C}{A} r$$

мы заключаем, что вектор  $a$  будет одного направления с вектором  $r$ , а на основании формулы

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{A}{C} \operatorname{tg} \alpha$$

видим, что

$$\vartheta > \alpha.$$

Этот случай изображен на рис. 64 и 66. Конус полодии катится по конусу герполодии, причем оба конуса острые и касаются своими наружными поверхностями. Отдельные точки твердого тела описывают в пространстве кривые, изображенные на рис. 66 и называемые эллици-

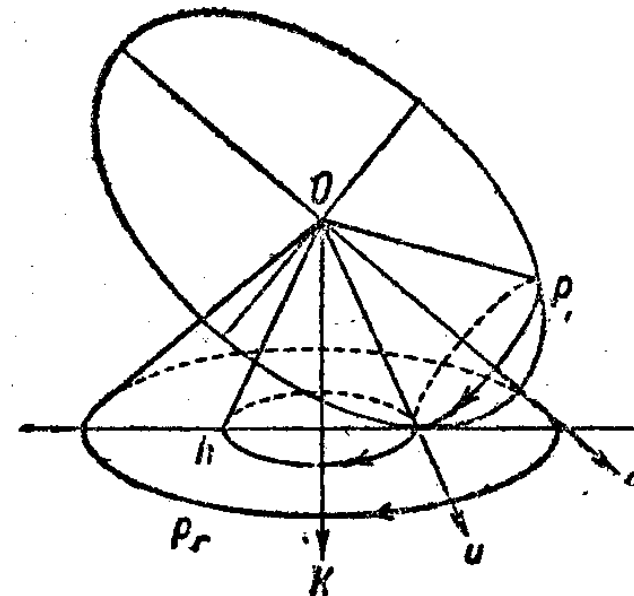


Рис. 64. Вытянутый волчок.

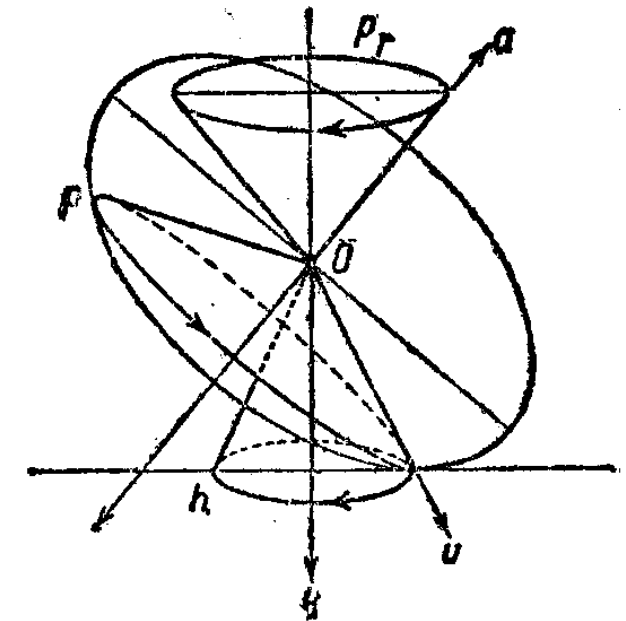


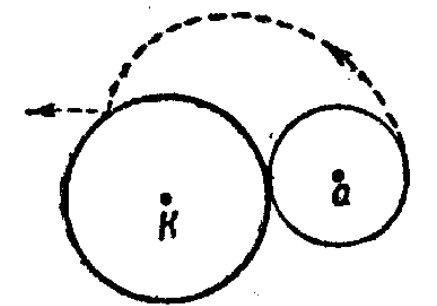
Рис. 65. Сплюснутый волчок

Oa — ось вращения, p — конус полодии, h — конус герполодии, pr — конус прецессии.

Oa — ось вращения, p — конус полодии, h — конус герполодии, pr — конус прецессии.

клоидами (циклоида, которую мы рассматривали в ч. II на стр. 170, рис. 78; 111, получалась при качении круга по прямой линии; эпициклоида получается при качении круга по окружности другого круга). Поэтому и само движение твердого тела называется иногда *эпициклическим*.

На рис. 63 у нас изображена диаграмма, содержащая все векторы, которыми мы интересовались: вектор угловой скорости вращения тела  $u$  с его двумя проекциями  $r$  и  $P$  и вектор прецессии  $b$  с его двумя проекциями  $\frac{C}{A} r$  и  $P$ .



На диаграмме обозначены и углы между этими векторами. Вся эта диаграмма вращается в пространстве вокруг оси  $b$ . Обращаем внимание, что векторы  $b$ ,  $a$  и образуют выделенный треугольник, выделенный у нас более жирными линиями.

Рис. 66. Эпициклоида.

Полезно заметить себе, что иногда конус, описываемый осью волчка в пространстве (рис. 64), называется конусом прецессии. Мы имеем, таким образом, три конуса: конус *полодии*, конус *герполодии* и конус *прецессии*.

79. Волчок сплюснутый. *Сплюснутым* волчком мы называем волчок, момент инерции которого вокруг оси симметрии больше, чем вокруг осей, перпендикулярных к оси симметрии

$$A < C.$$

Эллипсоид инерции такого волчка будет *вытянутый*, но эллипсоид энергии (эллипсоид Пуансо) будет *сплюснутый* (рис. 65). Из соотношения

$$a = \frac{A - C}{A} r$$

мы заключаем, что (в противоположность вытянутому волчку) вектор *a* будет иметь направление, противоположное вектору *r* (рис. 69) и угол  $\vartheta$  будет тупой.

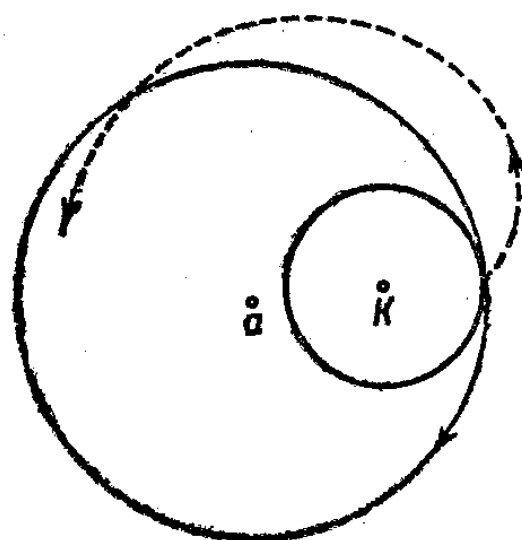


Рис. 67. Перициклоида.

Отверстие конуса *полодии* будет такое широкое, что он будет обнимать собою конус *герполодии* (рис. 65). При качении конус *полодии* будет касаться наружной поверхности конуса *герполодии* своей *внутренней* стороной. При таком качении отдельные точки тела будут описывать в пространстве кривые, изображенные на рис. 67, которые называются *перициклоидами*. Само движение волчка тоже иногда называется *перициклическим*.

На рис. 69 изображена диаграмма векторов, и мы советуем читателю сравнить эту диаграмму с диаграммой рис. 68, полученной для вытянутого волчка. Векторы *a*, *b*, *u* опять

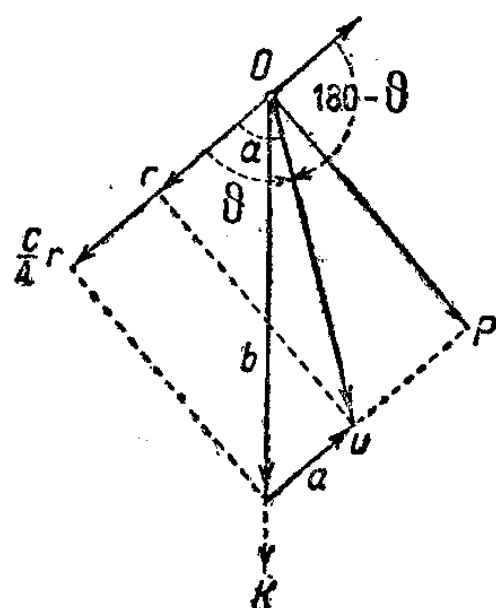
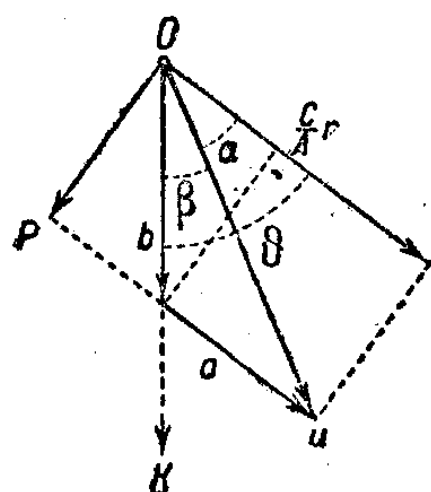


Рис. 68. Диаграмма вытянутого волчка. Рис. 69. Диаграмма сплюснутого волчка.

образуют замкнутый треугольник, но в отличие от предыдущего случая  $b > u$ . Кроме того, вектор *a* образует с вектором *K* *тупой* угол. Вследствие этого, если смотреть на вращающийся волчок по оси *K*, мы увидим,

что вращение волчка и его прецессия имеют противоположное направление, между тем как в предыдущем случае оба эти движения были одного направления (векторы образовали острый угол). Иногда обозначают это различие словами: движение *ретроградное* и *прогрессивное*, или *обратное* и *прямое*.

Если мы применим термин *конус прецессии* (конус, описываемый вектором *a*), то можем сказать, что в вытянутом волчке все три конуса — конус *полодии*, конус *герполодии* и конус *прецессии* — направлены своими отверстиями в одну сторону, тогда как при сплюснутом волчке конус *прецессии* направлен своим отверстием противоположно отверстиям конусов *полодии* и *герполодии* (ср. рис. 64 и рис. 65).

ВРАЩЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКИ

(Продолжение)

80. Эйлера координаты. В предыдущей главе мы применяли уравнения Эйлера, в которые входят проекции угловой скорости вращения тела  $\omega$ , а также и проекции моментов внешних сил на оси координат, вращающиеся вместе с телом. Для получения данных о вращении тела относительно неподвижного пространства мы должны были перейти от относительных вращений к абсолютным вращениям, причем использовали и теорему Пуансо. Можно, однако, составить уравнения движения, в которые входили бы проекции угловых скоростей и моментов на координаты, неподвижные в пространстве, и в некоторых случаях это удобнее и нагляднее.

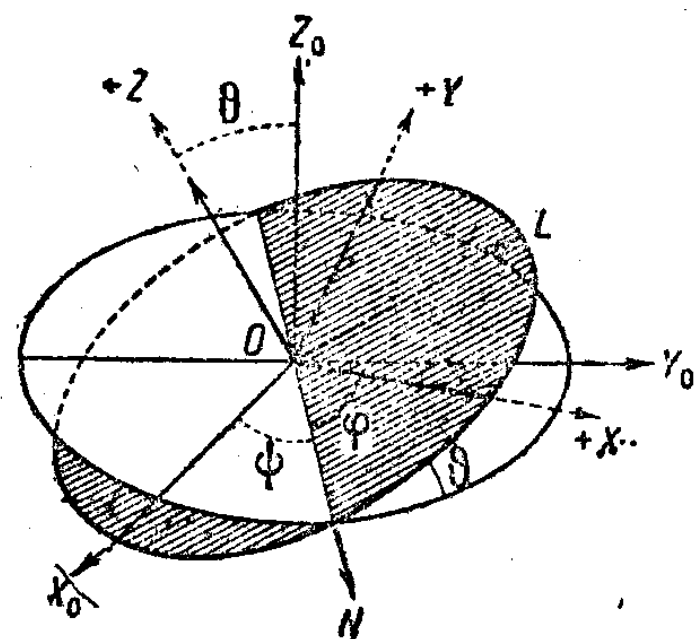


Рис. 70. Координаты Эйлера.

Так как твердое тело, закрепленное одной точкой, имеет три степени свободы (стр. 7, 2), то нам предстоит выбрать такие три координаты, которые бы вполне определяли положение тела. Эйлер предложил это делать следующим образом.

Пусть  $OX_0Y_0Z_0$  (рис. 70; ср. рис. 20 части II) представляет систему неподвижных декартовых координат, тогда как  $OXYZ$  — систему координат, неизменно связанную с телом. Начало обеих систем координат мы выбираем в точке закрепления тела, вокруг которой тело может свободно вращаться. Пло-

скости координат  $X_0Y_0$  и  $X_0Y$  обеих систем будут пересекаться друг с другом по некоторой прямой  $ON$  (линия узлов рис. 20, ч. II), а прямую, перпендикулярную к  $ON$  и лежащую в плоскости  $X_0Y$ , мы обозначим через  $OL$ .

Угол между осями  $OZ_0$  и  $OZ$  мы обозначим через  $\theta$ .  
 Угол " "  $OX_0$  и  $ON$  " " "  $\phi$ .  
 Угол " "  $ON$  и  $OX$  " " "  $\psi$ .

Этими тремя углами вполне определяется положение системы координат  $OXYZ$  (а следовательно, и положение всего твердого тела) относительно неподвижной системы  $OX_0Y_0Z_0$ . Для того чтобы доказать это, представим себе, что сперва система  $OXYZ$  совпадала с неподвижной системой  $OX_0Y_0Z_0$ . Затем при заданном угле  $\psi$  мы проводим в плоскости  $X_0Y_0$  линию  $ON$  и поворачиваем систему  $OXYZ$  вокруг этой линии  $ON$

(как вокруг оси) на угол  $\theta$  так, чтобы ось  $OZ$  заняла свое положение, как на рис. 70. Затем, повернув систему  $OXYZ$  (т. е. все твердое тело) вокруг оси  $OZ$  на угол  $\phi$ , мы получаем и положение осей  $OX$  и  $OY$ , как показано на рис. 70. Таким образом двумя вполне определенными поворотами подвижной системы вокруг осей  $ON$  и  $OZ$  мы перешли от положения неподвижных координат к положению подвижных координат. Следовательно, три выбранных нами угла  $\theta, \phi, \psi$  вполне определяют относительное положение обеих систем.

При изучении движения твердого тела вокруг неподвижной точки нас будет интересовать не столько преобразование координат, как преобразование угловых скоростей. В уравнения Эйлера входили проекции угловых скоростей  $p, q, r$  на оси  $OX, OY, OZ$ , неизменно связанные с телом, тогда как теперь нас будет интересовать, как будут меняться со временем углы  $\theta, \phi, \psi$ , и, следовательно, нам желательно иметь в уравнениях движения угловые скорости  $\dot{\theta}, \dot{\phi}, \dot{\psi}$ . Для перехода от одних проекций к другим проще всего применить тот прием, которым мы пользовались и раньше (ср. ч. I, стр. 160, 142), а именно составить проекции интересующего нас вектора угловой скорости и на те и другие оси. При этом, однако, нужно помнить, что угловые скорости откладываются всегда по оси, перпендикулярной к плоскости угла поворота, и притом по правилу правого винта (ч. I, стр. 27, 26).

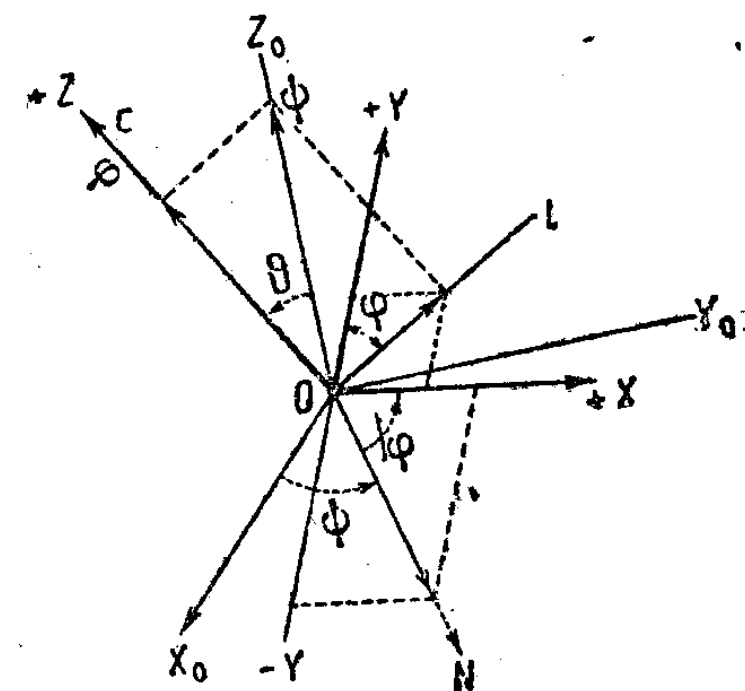


Рис. 71. Разложение угловых скоростей.

Угловая скорость  $\dot{\theta}$  имеет направление по оси  $ON$  (рис. 71), и ее составляющие по осям координат  $OXYZ$  равны соответственно:

$$\dot{\theta}_x = \dot{\theta} \cos \psi; \quad \dot{\theta}_y = -\dot{\theta} \sin \psi; \quad \dot{\theta}_z = 0.$$

Угловая скорость  $\dot{\phi}$  имеет направление по оси  $OZ_0$ ; мы ее разложим сперва на два взаимно перпендикулярных направления  $OZ$  и  $OL$ :

$$\dot{\phi}_z = \dot{\phi} \cos \theta; \quad \dot{\phi}_L = \dot{\phi} \sin \theta;$$

а затем эту последнюю составляющую мы опять разложим на две — по  $OX$  и  $OY$ :

$$\dot{\phi}_x = \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi; \quad \dot{\phi}_y = \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi.$$

Угловая скорость  $\dot{\psi}$  уже направлена по оси  $OZ$ .

Теперь нам остается только собрать все составляющие по отдельным осям  $OXYZ$  и полученные суммы приравнять проекциям  $p, q, r$ :

$$p = \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\psi} \cos \psi;$$

$$q = \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\psi} \sin \psi;$$

$$r = \dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi}.$$

Отсюда нетрудно получить и формулы обратного перехода:

$$\begin{aligned}\dot{\vartheta} &= p \cos \varphi - q \sin \varphi; \\ \dot{\psi} &= \frac{p \sin \varphi + q \cos \varphi}{\sin \vartheta}; \\ \dot{\varphi} &= r - (p \sin \varphi + q \cos \varphi) \operatorname{ctg} \vartheta.\end{aligned}$$

81. Уравнения движения в эйлеровых координатах. Полученные нами выражения мы могли бы подставить в уравнения Эйлера и, изменив соответственно проекции моментов сил, получить уравнения движения твердого тела вокруг неподвижной точки в эйлеровых координатах. Однако мы предпочитаем вывести эти уравнения независимо от прежних, исходя из выражения для энергии тела и применив метод Лагранжа (ч. II, стр. 231, 151). Мы ограничимся случаями, когда  $A = B$ .

Кинетическая энергия  $T$  вращающегося тела (для удобства письма мы берем удвоенную энергию) выразится теперь формулой:

$$2T = A(p^2 + q^2) + Cr^2 = A(\sin^2 \vartheta \cdot \dot{\psi}^2 + \dot{\vartheta}^2) + C(\dot{\varphi} \cos \vartheta + \dot{\psi})^2.$$

Проекция момента импульса  $K$  на различные оси мы получим, взяв частные производные от кинетической энергии по соответствующей угловой скорости (стр. 24, 19). Для большей ясности мы поставили у проекции момента импульса два значка: один из них указывает на ось, на которую берется проекция, а другой — на соответствующую этой оси угловую координату Эйлера:

$$\begin{aligned}K_{N\vartheta} &= \frac{\partial T}{\partial \dot{\vartheta}} = A\dot{\vartheta}; \\ K_{\xi, \varphi} &= \frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} = A\dot{\psi} \sin^2 \vartheta + Cr \cos \vartheta; \\ K_{z, \psi} &= \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = Cr.\end{aligned}$$

(Обозначение  $r$  мы оставили и в этих формулах для сокращения письма; значение же  $r$ , выраженное через координаты Эйлера, у нас дано выше.)

Для составления уравнений Лагранжа нам еще необходимы частные производные по угловым координатам. Прежде всего мы видим, что координаты  $\psi$  и  $\varphi$  совсем не входят в выражение кинетической энергии (входят только угловые скорости  $\dot{\psi}$  и  $\dot{\varphi}$ ). Поэтому мы имеем:

$$\frac{\partial T}{\partial \psi} = 0; \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0.$$

Только производная по  $\vartheta$  даст нам:

$$\frac{\partial T}{\partial \vartheta} = A\dot{\psi}^2 \cos \vartheta \sin \vartheta - Cr\dot{\psi} \sin \vartheta.$$

Как известно, угловым координатам соответствуют моменты сил (ч. II, стр. 231, 151), поэтому уравнения Лагранжа для каждой угловой координаты  $\alpha$  будут иметь вид:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}} - \frac{\partial T}{\partial \alpha} = M_{\alpha}.$$

Составляя подобное уравнение для координат  $\vartheta$ ,  $\varphi$ ,  $\psi$ , получаем следующие уравнения движения в эйлеровых координатах:

$$\begin{aligned}M_{N\vartheta} &= A\ddot{\vartheta} - A\dot{\psi}^2 \cos \vartheta \sin \vartheta + Cr\dot{\psi} \sin \vartheta; \\ M_{\xi, \varphi} &= A\ddot{\psi} \sin^2 \vartheta + 2A\dot{\psi} \dot{\vartheta} \sin \vartheta \cos \vartheta + Cr \cos \vartheta - Cr \dot{\vartheta} \sin \vartheta; \\ M_{z, \psi} &= Cr.\end{aligned}$$

И здесь мы нашли более удобным оставить в формулах величину  $r$ , хотя она и не относится к эйлеровым координатам, но, вводя ее, мы сокращаем формулы.

82. Прецессия свободного волчка. В качестве примера применения уравнений предыдущего параграфа мы разберем еще случай волчка, на который не действуют моменты внешних сил (ср. стр. 115, 87).

Положив в уравнениях  $M_{\varphi} = 0$ , мы получаем:

$$\dot{r} = 0, \quad r = \dot{\psi} \cos \vartheta + \dot{\varphi} = \text{const.}$$

Далее, вполне возможен случай, когда при  $M_{\vartheta} = 0$  угол  $\vartheta$  остается во все время движения постоянным; это условие будет соблюдено, если мы выберем направление оси  $OZ$  по направлению вектора  $K$  момента импульса вращающегося волчка. Положив в первом уравнении моментов  $M_{\vartheta} = 0$  и  $\dot{\vartheta} = 0$ , получаем (сокращая на  $\dot{\psi} \sin \vartheta$ ):

$$\dot{\psi} = \frac{Cr}{A \cos \vartheta}.$$

Эту величину  $\dot{\psi}$  мы прежде обозначили вектором  $b$ ; она представляет собой угловую скорость вращения оси волчка вокруг  $OZ$  (оси момента импульса  $K$ ) и называется *прецессией* волчка. В рассматриваемом случае эта прецессия *регулярна* (величина  $\dot{\psi}$  не меняется со временем).

По известным величинам  $r$  и  $\dot{\psi}$  мы можем определить

$$\dot{\varphi} = r - \dot{\psi} \cos \vartheta = \frac{A - C}{A} r.$$

Величину  $\dot{\varphi}$  мы прежде обозначили вектором  $a$ .

Наконец, положив в формулах преобразования угловых скоростей  $\dot{\vartheta} = 0$ , мы имеем:

$$\begin{aligned}p &= \dot{\psi} \sin \vartheta \sin \varphi; \\ q &= \dot{\psi} \sin \vartheta \cos \varphi; \\ p^2 + q^2 &= \dot{\psi}^2 \sin^2 \vartheta; \quad u^2 = (\dot{\psi} \sin \vartheta)^2 + r^2.\end{aligned}$$

Все эти результаты совпадают с тем, что мы получили из уравнений Эйлера. Разница в наших вычислениях состоит только в том, что прежде мы относили уравнения движения тела к координатам, *вращающимся* вместе с телом, а затем определяли движение по отношению к *неподвижным* координатам, тогда как сейчас мы шли обратным путем.

83. Прецессия и нутация. *Прецессией* мы назвали изменение со временем угла  $\psi$  в эйлеровых координатах, изменение же угла  $\vartheta$  мы будем называть *нутацией*. В предыдущем параграфе мы выбрали направление неподвижной оси  $OZ_0$ , совпадающее с направлением вектора момента импульса волчка  $K$ . При таком выборе координат у нас угол  $\vartheta$  оказался постоянным, и, следовательно, *никакой нутации* не получилось; кроме того, угловая скорость прецессии  $\dot{\psi}$  оказалась *постоянной*. Но если бы мы выбрали другое направление неподвижной оси  $OZ_0$ , то, хотя угол между векторами  $a$  и  $K'$  оставался бы при движении постоянным, тем не менее угол между осью волчка и осью  $OZ_0$  изменялся бы, и мы получили бы нутацию. Действительно, ось волчка описывает вокруг неподвижной оси  $K$  круговой конус, и в некоторые моменты времени ось волчка будет находиться вне угла, образуемого  $K$  с осью  $OZ_0$ , тогда как, обойдя пол-оборота прецессионного движения вокруг оси  $K$ , ось волчка придется внутри этого угла. Таким образом угол  $\vartheta$  между осью волчка и осью  $OZ_0$  будет меняться периодически с частотой, равной угловой скорости прецессии волчка  $\dot{\psi}_0$  вокруг оси момента импульса  $K$ .

Вместе с изменением угла  $\vartheta$  будет при таком движении изменяться и угол  $\psi$ , и притом с той же самой частотой  $\dot{\psi}_0$ . Прецессия  $\dot{\psi}$  относительно тех координат, которые мы теперь предложили, уже не будет регулярной (величина  $\dot{\psi}$  не будет постоянной).

Из этого мы видим, что если *буквально* придерживаться номенклатуры, обозначая через  $\dot{\psi}$  прецессию, а через  $\dot{\vartheta}$  нутацию, то эти величины будут зависеть от выбора системы координат. Имея это в виду, мы должны каждый раз указывать, относительно каких координат даны величины  $\dot{\psi}$  и  $\dot{\vartheta}$ .

Так, например, при описании движения свободного волчка мы можем сказать, что ось волчка совершает *регулярную прецессию без нутации*, но при этом мы предполагаем, что движение отнесено к *неподвижной оси момента импульса*. Такое описание движения волчка и проще, и нагляднее, и более соответствует свойству самого физического явления.

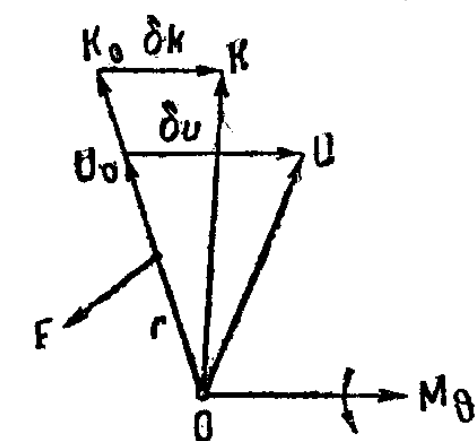


Рис. 72. Разложение угловых скоростей.

84. Удар по оси волчка. Пусть  $K_0$  (рис. 72) представляет собой момент импульса волчка и  $u_0$  — его угловую скорость вращения. Мы предполагаем, следовательно, что волчок вращается вокруг одной из своих главных осей инерции и не совершает никакой прецессии. Предположим, что в некоторый момент времени  $t_0$  мы сообщаем оси волчка *толчок*, т. е. мгновенную силу  $F$ , приложенную к точке  $A$  оси на расстоянии  $r$  от его центра тяжести. Это означает, что в момент времени  $t_0$  начал действовать неко-

торый момент сил  $M_\theta = [rF]$ , стремящийся повернуть волчок вокруг оси  $OM_\theta$  (рис. 72) и произвести отклонение оси на некоторый угол  $\vartheta$ . Мы знаем, что момент сил производит изменение момента импульса тела, и если момент сил действовал небольшое время  $\tau$ , то полное изменение момента импульса за это время будет равно:

$$\delta K = \int_{t_0}^{t_0 + \tau} M_\theta \cdot dt.$$

Направление вектора  $\delta K$  параллельно вектору  $M_\theta$  и, следовательно, перпендикулярно к начальному моменту импульса  $K_0$ . Сложив первоначальный момент импульса вновь сообщенному телу моментом импульса (геометрически; рис. 72), получаем результирующий момент импульса  $K$ .

Таким образом момент импульса тела после толчка изменил свое направление и отклонился на угол  $\vartheta$ , определяемый формулой:

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{\delta K}{K} = \frac{\delta K}{Cr}.$$

Мы видим, что отклонение будет при прочих равных условиях тем меньше, чем быстрее вращается волчок (чем больше  $r$ ).

В то же самое время и вектор  $u_0$  тоже получит некоторое отклонение. Действительно, дополнительный момент импульса  $\delta K$  вокруг оси  $OM$  даст нам дополнительную угловую скорость вращения вокруг той же оси:

$$\delta u = \frac{\delta K}{A},$$

где  $A$  — момент инерции вокруг этой оси. Складывая эту дополнительную скорость с первоначальной скоростью  $u$ , получаем результирующую угловую скорость, которая отклонена от первоначальной угловой скорости на некоторый угол, определяемый формулой:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\delta u}{u}.$$

Так как углы  $\alpha$  и  $\vartheta$  неодинаковы, то после сообщенного толчка векторы  $K$  и  $u$  уже не будут совпадать друг с другом, и волчок будет совершать вращение, сопровождаемое *прецессией* вокруг оси  $K$ .

85. Волчок стоячий и волчок висящий. Имея в виду рассмотреть действие на волчок силы тяжести, или, точнее, *момента* силы тяжести (сила тяжести действует и на волчок, подпертый в центре тяжести, но никаких действий не производит), нам необходимо различать два типичных случая: во-первых, тот случай, когда точка опоры волчка помещена *ниже* его центра тяжести (рис. 73) и, во-вторых, когда она находится *выше* его центра тяжести (рис. 74). Первый случай мы будем для краткости называть *стоячим волчком*, второй случай будем называть *висящим*

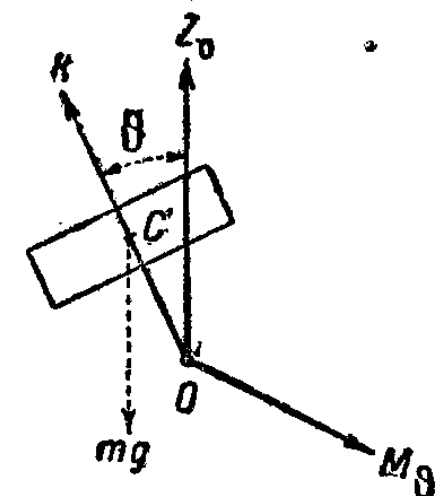
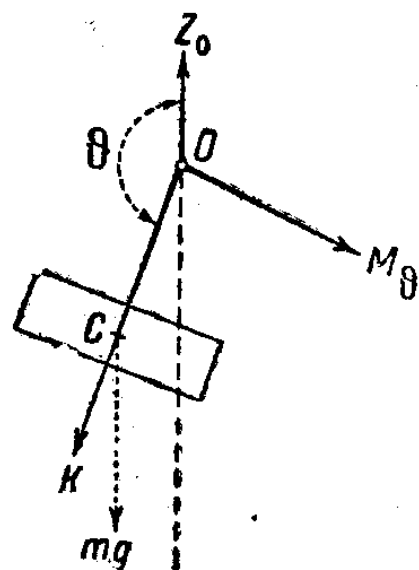


Рис. 73. Стоячий волчок.

волчком. К первому случаю нужно отнести волчки-игрушки, ко второму случаю относится большинство волчков, употребляемых в технике.

Обозначим через  $m$  массу волчка, через  $g$  ускорение силы тяжести и через  $s$  расстояние центра тяжести от точки опоры.



В стоячем волчке угол  $\vartheta$ , отклонение оси волчка от вертикали, направленной вверх, будет острый, и момент силы тяжести вокруг горизонтальной оси, проходящей через точку опоры  $O$  волчка, определится формулой (рис. 73):

$$M_{\vartheta} = mgs \sin \vartheta.$$

В висящем волчке угол  $\vartheta$  будет тупой (рис. 74); тем не менее момент силы тяжести выразится той же самой формулой: однако необходимо помнить, что  $\cos \vartheta$  теперь будет отрицательный. Иногда вместо угла  $\vartheta$  мы будем вводить в наши формулы угол  $\alpha = (180^\circ - \vartheta)$ . При этом мы получим:

$$\sin \alpha = \sin \vartheta; \quad \cos \alpha = -\cos \vartheta.$$

Рис. 74. Висящий волчок.

Обратим внимание на то, что висящий волчок представляет собой не что иное, как маятник, с тем, однако, различием, что его чечевица обладает вращением. Это последнее обстоятельство, как увидим ниже, может значительно изменить его движения.

86. Регулярная прецессия волчка при действии момента силы тяжести. Прежде всего зададимся вопросом, возможна ли регулярная прецессия волчка, находящегося под действием момента силы тяжести, и при каких условиях она возможна. Регулярной мы назвали такую прецессию, при которой  $\dot{\varphi} = \text{const}$  и, следовательно,  $\ddot{\vartheta} = 0$ . Подставив эти величины в уравнение моментов  $M_{\vartheta}$ , получаем после сокращения на  $\sin \vartheta$ :

$$mgs = -A\dot{\varphi}^2 \cos \vartheta + Cr \dot{\varphi}.$$

Введем в это уравнение обозначение:

$$\dot{\varphi}_0 = \frac{Cr}{A \cos \vartheta};$$

эта величина, как мы уже знаем (стр. 109, 82), представляет регулярную прецессию того же волчка при отсутствии момента силы тяжести. Тогда имеем:

$$\dot{\varphi}^2 - \dot{\varphi}_0 \dot{\varphi} + \frac{mgs}{A \cos \vartheta} = 0$$

и можем определить:

$$\dot{\varphi} = \frac{1}{2} \left[ \dot{\varphi}_0 \pm \sqrt{\dot{\varphi}_0^2 - \frac{4mgs}{A \cos \vartheta}} \right].$$

Формула показывает, что, вообще говоря, возможны две регулярные прецессии: одна из них быстрая, другая медленная. Однако, если подкоренная величина отрицательна, т. е. если

$$(Cr)^2 < 4Amgs \cos \vartheta,$$

то регулярная прецессия вообще невозможна.

Нетрудно видеть, что при отсутствии момента силы тяжести ( $g=0$ ) вышенаписанная формула превращается в формулу регулярной прецессии свободного волчка ( $\dot{\varphi}_0$ ).

Другой крайний случай мы имеем при отсутствии вращения, т. е. при  $r=0$ ; тогда

$$\dot{\varphi} = \pm \sqrt{-\frac{mgs}{A \cos \vartheta}}.$$

Для стоячего волчка эта прецессия невозможна ( $\dot{\varphi}$  получает мнимое значение), но для висящего волчка  $\cos \vartheta < 0$  и  $\dot{\varphi}$  имеет действительное значение.

Но при отсутствии вращения мы имеем здесь случай простого маятника, и величина  $\dot{\varphi}$  представляет собой ту угловую скорость вращения маятника вокруг вертикали, которая необходима для того, чтобы угол  $\vartheta$ , образуемый маятником с вертикалью, оставался неизменным. Мы можем и про маятник сказать, что написанное условие для  $\dot{\varphi}$  представляет условие регулярной прецессии маятника.

Для маятника момент инерции  $A$  выразится через массу  $m$  и длину маятника  $l$  таким образом:

$$A = ml^2; \quad l = s,$$

и если мы введем острый угол наклона маятника к вертикали  $\alpha = 180^\circ - \vartheta$ , то получим формулу:

$$\dot{\varphi} = \pm \sqrt{\frac{g}{l \cos \alpha}},$$

совпадающую с той, которую мы получили для так называемого конического маятника раньше (ср. ч. II, стр. 178, 116). Для конического маятника возможны тоже две различных величины прецессии; но они равны и противоположны.

Сравнение с коническим маятником очень поучительно и придает нашим вычислениям большую наглядность. Было бы, например, совершенно неправильно думать, что при данных значениях величин  $A$ ,  $C$ ,  $g$ ,  $\vartheta$  и при наличии момента силы тяжести  $mgs \sin \vartheta$  волчок непременно будет совершать прецессию по формуле:

$$\dot{\varphi} = \frac{1}{2} \left[ \dot{\varphi}_0 \pm \sqrt{\dot{\varphi}_0^2 - \frac{mgs}{A \cos \vartheta}} \right],$$

а нужно понимать наш результат таким образом. Если при вышеназванных данных мы сообщим волчку прецессию величина, равной одному из



написанных двух *возможных* значений  $\phi$ , то волчок при таких условиях будет совершать регулярную прецессию, т. е. угол  $\vartheta$  будет оставаться *постоянным*. При других условиях (так же как и для простого маятника) прецессия, вообще говоря, не будет регулярна, и угол  $\vartheta$  не будет постоянным.

Регулярная прецессия волчка и при действии момента силы тяжести представляет собою *устойчивое движение*, и около этого движения возможны *нutationи*. Однако мы на этом останавливаться не будем и перейдем к более общему случаю.

87. Прецессия волчка с нутацией. Первое уравнение моментов (для координаты  $\vartheta$ ) будет теперь иметь вид:

$$M_{\vartheta} = mgs \sin \vartheta = A\ddot{\vartheta} - A\dot{\phi}^2 \sin \vartheta \cos \vartheta + Cr\dot{\phi} \sin \vartheta.$$

Здесь  $A$  означает момент инерции волчка вокруг оси  $OK$ , проходящей через точку опоры; такой же момент инерции мы имеем и относительно оси  $OL$ , перпендикулярной к  $OK$ . Вокруг оси симметрии волчка  $OZ$  момент инерции равен  $C$ .

Остальные два уравнения моментов мы не будем переписывать, потому что мы предполагаем выбрать несколько иной путь решения задачи. Заметим, что

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} = 0; \quad \frac{\partial U}{\partial \dot{\phi}} = 0; \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = 0; \quad \frac{\partial U}{\partial \dot{\varphi}} = 0.$$

Это означает, что ни кинетическая энергия, ни потенциальная энергия тела не зависят от координат  $\phi$  и  $\varphi$ . Такие координаты называются *циклическими* (см. ч. II, стр. 249, 163). Импульсы, соответствующие циклическим координатам — в данном случае импульсы  $K_{\phi}$  и  $K_{\varphi}$  — остаются постоянными (это — общее правило), и мы можем воспользоваться этим для исключения циклических координат из наших уравнений. Так, например, уравнением (стр. 108, 81):

$$K_{\varphi} = \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = Cr = \text{const}$$

само собою исключается координата  $\varphi$ ; и действительно, угол  $\varphi$  не имеет значения для дальнейшего решения задачи. Угловая скорость  $\dot{\varphi}$  тоже исключилась у нас, а осталась лишь постоянная скорость вращения волчка вокруг его оси симметрии. Этим обстоятельством мы уже неоднократно пользовались.

Момент импульса, соответствующий координате  $\phi$ , напишется так (стр. 108, 81):

$$K_{\phi} = \frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} = A\dot{\phi} \sin^2 \vartheta + Cr \cos \vartheta = \text{const}.$$

Положим, что в некоторый момент времени  $t = 0$  прецессия  $\dot{\phi}_0$  равнялась нулю и угол наклона волчка к вертикали был равен  $\vartheta_0$ . Под-

ставляя эти значения в написанное уравнение, получаем значение момента импульса в момент  $t = 0$ :

$$K_{\phi} = Cr \cos \vartheta_0.$$

Эта величина момента импульса *остается постоянной* и для всех последующих моментов времени, а потому уравнение момента импульса можно написать так:

$$A\dot{\phi} \sin^2 \vartheta = Cr (\cos \vartheta_0 - \cos \vartheta).$$

Затем составим выражение *полной (удвоенной) энергии* волчка (см. стр. 108, 81):

$$2(T + U) = A(\dot{\vartheta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \vartheta) + Cr^2 + 2mgs \cos \vartheta = \text{const}.$$

Полная энергия волчка должна во все время движения *оставаться постоянной*, так как мы предполагаем, что волчок продолжает вращаться и не падает, несмотря на действие силы тяжести. Это, действительно, и наблюдается довольно часто.

Если мы в выражение энергии подставим начальные условия, а именно:

$$t = 0; \quad \dot{\varphi}_0 = 0; \quad \vartheta = \vartheta_0,$$

то получим для  $t = 0$ :

$$2(T + U)_{t=0} = Cr^2 + 2mgs \cos \vartheta_0 = \text{const},$$

и уравнение постоянства полной энергии может быть переписано в следующей форме:

$$A(\dot{\vartheta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \vartheta) = 2mgs (\cos \vartheta_0 - \cos \vartheta).$$

Левая часть этого уравнения — существенно *положительная* величина; отсюда заключаем, что во все время движения

$$\vartheta > \vartheta_0.$$

Это означает, что отклонения волчка от начального положения, когда  $\vartheta$  было равно  $\vartheta_0$ , могут происходить только в *положительную* сторону, и если мы положим

$$\vartheta = \vartheta_0 + \nu,$$

то величину  $\nu$  нужно считать *положительной* (она может в некоторые моменты времени равняться и нулю, но не может быть отрицательной).

Если это так, то из уравнения момента импульса

$$\dot{\phi} = \frac{Cr}{A \sin^2 \vartheta} (\cos \vartheta_0 - \cos \vartheta)$$

мы видим, что и величина  $\dot{\phi}$  тоже всегда положительна, за исключением тех случаев, когда  $\vartheta = \vartheta_0$ ; в эти моменты времени  $\dot{\phi} = 0$ .

Подставим это значение  $\dot{\phi}$  в уравнение энергии; тогда получаем уравнение:

$$(\dot{\vartheta})^2 = \frac{\cos \vartheta_0 - \cos \vartheta}{A} \left[ 2mgs - \frac{C^2 r^2}{A \sin^2 \vartheta} (\cos \vartheta_0 - \cos \vartheta) \right],$$

которое содержит только одну координату  $\vartheta$  и начальные данные; все остальные координаты  $\phi$  и  $\varphi$  исключились. На этом примере мы видим, почему циклические координаты называются в английской литературе *исключаемыми* (ч. II, стр. 249, 163) координатами.

В полученном нами уравнении слева стоит существенно положительная величина, а справа первый множитель тоже, как мы видели выше, всегда положителен ( $\vartheta > \vartheta_0$ ); следовательно, и второй множитель должен оставаться во все время движения положительным. Отсюда заключаем, что

$$2mgs > \frac{C^2 r^2}{A \sin^2 \vartheta} (\cos \vartheta_0 - \cos \vartheta),$$

а следовательно:

$$(\cos \vartheta_0 - \cos \vartheta) < 2mgs \frac{A \sin^2 \vartheta}{C^2 r^2}.$$

Из последнего неравенства мы видим, что разность  $(\vartheta - \vartheta_0)$ , т. е. величина нутации  $\nu$ , вообще говоря, бывает *невелика*; в особенности она мала при больших значениях  $r$ , т. е. *при быстрых вращениях* волчка.

До сих пор наши формулы были вполне точны, но это последнее замечание позволяет нам сделать значительные упрощения в формулах, если удовольствоваться приближенным расчетом рассматриваемого явления.

88. *Приближенное решение.* Предположим, действительно, что правая часть нашего неравенства очень мала; тогда левая часть неравенства будет еще того меньше, и мы можем положить:

$$\begin{aligned} \vartheta &= \vartheta_0 + \nu; \quad \sin \nu = \nu; \quad \cos \nu = 1 - \frac{1}{2} \nu^2; \\ \cos \vartheta &= \cos(\vartheta_0 + \nu) = \cos \vartheta_0 \cdot \cos \nu - \sin \vartheta_0 \cdot \sin \nu = \\ &= \cos \vartheta_0 - \frac{1}{2} \cos \vartheta_0 \cdot \nu^2 - \sin \vartheta_0 \cdot \nu; \\ \cos \vartheta_0 - \cos \vartheta &= \frac{1}{2} \cos \vartheta_0 \cdot \nu^2 + \sin \vartheta_0 \cdot \nu. \\ \sin^2(\vartheta_0 + \nu) &= \sin^2 \vartheta_0 + 2 \cos \vartheta_0 \cdot \nu. \end{aligned}$$

Подставляя эти формулы в уравнение для  $\vartheta$  и откидывая все члены со степенями  $\nu$  выше второй, мы получаем:

$$(\vartheta)^2 = (\nu)^2 = D \cdot \nu - E \cdot \nu^2,$$

где коэффициенты  $D$  и  $E$  означают:

$$\begin{aligned} D &= \frac{1}{A} 2mgs \sin \vartheta_0; \\ E &= \left(\frac{Cr}{A}\right)^2 - \frac{mgs \cos \vartheta_0}{A}. \end{aligned}$$

Вышеписанное уравнение можно интегрировать обычным способом (ср. курс интегрального исчисления), и мы предлагаем это сделать читателю.

телю самому, тогда как здесь мы выберем несколько иной путь решения, который мы неоднократно применяли и раньше.

Имея в виду, что нутация  $\nu$  должна быть *периодична* во времени и притом, как мы доказали выше, она должна быть *положительной*, попробуем задаться решением этого уравнения в такой форме:

$$\nu = \nu_0 (1 - \cos at).$$

Это решение удовлетворяет начальным условиям, по которым при  $t=0$  и  $\nu$  должно равняться нулю; кроме того,  $\nu$  остается для любого времени  $t$  положительным. Что касается до амплитуды нутаций  $\nu_0$  и до частоты  $a$ , то подберем их так, чтобы удовлетворить вышеписанному дифференциальному уравнению.

Составим сперва формулы:

$$\begin{aligned} \dot{\nu} &= \nu_0 \sin at \cdot a; \\ \nu^2 &= \nu_0^2 (1 + \cos^2 at - 2 \cos at) = -(\nu_0 \sin at)^2 + 2\nu_0 \nu \end{aligned}$$

и подставим их в дифференциальное уравнение. Тогда получаем:

$$\begin{aligned} (\nu_0 \sin at)^2 a^2 &= D\nu - 2E\nu_0 \nu + E(\nu_0 \sin at)^2; \\ (\nu_0 \sin at)^2 [a^2 - E] &= \nu_0 (1 - \cos at) [D - 2E\nu_0]. \end{aligned}$$

Для того чтобы это уравнение удовлетворялось в каждый момент времени (т. е. независимо от значения величины  $t$ ), необходимо, чтобы выражения, стоящие в прямых скобках, сами по себе равнялись нулю. Мы получаем, таким образом, два уравнения, из которых и определяются:

$$a = \sqrt{E}; \quad \nu_0 = \frac{D}{2E} = \frac{D}{2a^2}.$$

Подставляя сюда значения коэффициентов уравнения  $D$  и  $E$ , получаем:

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{\left(\frac{Cr}{A}\right)^2 - \frac{mgs \cos \vartheta_0}{A}}; \\ \nu_0 &= \frac{Amgs \sin \vartheta_0}{(Cr)^2 - Amgs \cos \vartheta_0}. \end{aligned}$$

При *очень* быстрых вращениях волчка (т. е. при тех значениях  $r$ , которые встречаются в практике) мы можем даже вторым членом в выражении для частоты  $a$  пренебречь по сравнению с первым членом и удовольствоваться формулами:

$$\begin{aligned} a &= \frac{Cr}{A}; \\ \nu_0 &= \frac{Amgs \sin \vartheta_0}{(Cr)^2} = \frac{M_0}{Cr \cdot a}. \end{aligned}$$

В последнюю формулу мы ввели обозначение:

$$M_0 = mgs \sin \vartheta_0.$$

Эта величина представляет собой момент силы тяжести в начале движения (при  $t=0$ ), а также в те моменты времени, когда  $\vartheta = \vartheta_0$ . В другие моменты времени момент сил  $M$  немного изменяется вследствие угла  $\vartheta$ , т. е. вследствие нутаций. Итак, для нутации мы можем написать:

$$\nu = \frac{M_0}{Cra} (1 - \cos at).$$

Переходя к вычислению прецессии по формуле (стр. 114, 87):

$$\dot{\phi} = \frac{Cr}{A \sin^2 \vartheta} (\cos \vartheta_0 - \cos \vartheta),$$

мы можем и здесь разность косинусов выразить через нутацию:

$$\dot{\phi} = \frac{Cr}{A \sin \vartheta} \nu = \frac{a}{\sin \vartheta} \nu.$$

Подставляя сюда найденное нами выражение для  $\nu$  и заменяя  $\vartheta$  через  $\vartheta_0$  (при малом  $\nu$ ), получаем величину прецессии:

$$\dot{\phi} = \frac{mgs}{Cr} (1 - \cos at).$$

89. Другой способ приближенного решения. В предыдущем параграфе мы применили приближенные формулы к уравнению энергии, но мы могли бы применить их также к уравнению моментов. Сделаем это. На место точного уравнения

$$M_0 = mgs \sin \vartheta = A\ddot{\vartheta} - A\dot{\phi}^2 \sin \vartheta \cos \vartheta + Cr\dot{\phi} \sin \vartheta$$

мы можем (пренебрегая величиной  $\dot{\phi}$  по сравнению с быстрым вращением волчка вокруг его оси  $r$  или  $\varphi$ ) применить упрощенное уравнение:

$$mgs \sin \vartheta = A\ddot{\nu} + Cr\dot{\phi} \cdot \sin \vartheta$$

и присоединить к этому приближенное выражение для прецессии:

$$\dot{\phi} = \frac{Cr}{A \sin \vartheta} \nu.$$

Вводя обозначение  $\mu = \dot{\phi} \sin \vartheta$ , мы получаем два уравнения для определения  $\mu$  и  $\nu$ :

$$\frac{M}{A} = \ddot{\nu} + a\mu; \quad \dot{\mu} = a\nu,$$

где мы обозначили, как и прежде,

$$a = \frac{Cr}{A}.$$

Подставляя второе уравнение в первое, получаем дифференциальное уравнение для  $\nu$ :

$$\ddot{\nu} + a^2\nu = \frac{M}{A},$$

которое легко интегрируется, а именно (предоставляем читателю самому в этом убедиться):

$$\nu = \frac{M}{Aa^2} (1 - \cos at)$$

(мы приняли, что при  $t=0$  отклонение  $\nu=0$ ).

Получив выражение для  $\nu$ , подставляем его во второе уравнение и определяем  $\mu$ , а следовательно, и  $\dot{\phi}$ , в полном согласии с результатами предыдущего параграфа. Написанные выше приближенные уравнения для  $\mu$  и  $\nu$  нам будут встречаться неоднократно в таком, более симметричном виде:

$$\frac{M}{A} = \ddot{\nu} + a\mu;$$

$$0 = \dot{\mu} - a\nu;$$

причем:

$$a = \frac{Cr}{A}.$$

90. Циклоидальное движение оси волчка. Проинтегрируем выражение для  $\dot{\phi}$  по времени, приняв, что при  $t=0$  угол  $\phi$  был равен нулю, и напишем формулы для  $\phi$  и  $\nu$  вместе:

$$\phi = \frac{mgs}{Cra} (at - \sin at);$$

$$\nu = \frac{mgs \sin \vartheta_0}{Cra} (1 - \cos at).$$

Для того чтобы от угловых отклонений перейти к линейным отклонениям, нам необходимо умножить величины  $\phi$  и  $\nu$  на расстояние до соответствующей оси вращения. Обратим внимание на какую-либо точку  $P$  оси волчка (большею частью это будет верхний конец оси волчка) и обозначим ее расстояние от точки опоры через  $l$ . Нутации происходят вокруг оси, проходящей через опору, а потому линейное отклонение, соответствующее углу  $\nu$ , будет равно  $y = l\nu$ . Прецессия происходит вокруг вертикальной оси по кругу радиуса  $l \sin \vartheta_0$ , поэтому линейное отклонение вдоль круга прецессии будет равно  $x = l \sin \vartheta_0 \cdot \phi$ . Таким образом для линейных отклонений мы получаем:

$$x = \frac{l mgs \sin \vartheta_0}{Cra} (at - \sin at);$$

$$y = \frac{l mgs \sin \vartheta_0}{Cra} (1 - \cos at).$$

Если мы сравним эти формулы с уравнениями обыкновенной циклоиды (ч. II, 170, 111):

$$\begin{aligned} x &= r_0 (\varphi - \sin \varphi); \\ y &= r_0 (1 - \cos \varphi), \end{aligned}$$

то увидим, что они одинаковы. Отсюда заключаем: каждая точка оси волчка описывает при своем движении *циклоиду*.

Циклоиду мы представляли себе образованной качением круга по прямой линии. В рассматриваемом нами теперь случае движение происходит по кругу прецессии; однако величина нутации  $\psi$  обыкновенно так мала, что сравнительно с ней окружность круга прецессии можно принять за прямую (см. следующий параграф). Радиус катящегося круга, описывающего нашу циклоиду, определяется формулой:

$$r_0 = \frac{lmg \sin \vartheta_0}{Cra} = l\psi_0,$$

т. е. он равен амплитуде нутаций. Каждый оборот этого круга происходит во время одного периода нутации

$$T_\psi = \frac{2\pi}{a},$$

и путь, проходимый этим кругом за время одного периода, т. е. расстояние между двумя следующими друг за другом острыми циклоиды (от  $t=0$  до  $t=T_\psi$ ), будет равен

$$x_0 = 2\pi r_0.$$

Число таких циклоидальных шагов, которые каждая точка оси волчка делает при полном обходе круга прецессии, будет равно длине окружности круга прецессии  $2\pi l \sin \vartheta_0$ , разделенной на длину одного шага циклоиды:

$$n = \frac{l \sin \vartheta_0}{r_0} = \frac{\sin \vartheta_0}{\psi_0}.$$

Но ту же самую величину мы можем получить, деля время полного оборота прецессии на время одной полной нутации:

$$n = T_\varphi : T_\psi = \frac{a}{\psi}.$$

Таким образом все детали движения легко поддаются расчету.

Однако к сказанному здесь необходимо добавить некоторые замечания. Во-первых, не нужно забывать, что наши расчеты представляют только первое приближение, сделанное нами в предположении, что волчок вращается *очень быстро*. Во-вторых, мы предположили, что при  $t=0$  и  $\psi=0$ . Это означает, что волчок после установки острием на подставку предоставляется действию момента силы тяжести *без начальной прецессии*. Только при таких условиях мы получим чистую циклоиду

с *острыми* концами. Если же в начале движения волчку был дан толчок или направление его момента импульса не совпадало в точности с направлением оси волчка (это тоже служит причиной прецессии; стр. 109, 82), то вместо циклоиды с острыми вершинами (рис. 76) ось волчка будет описывать кривые, похожие на обыкновенную циклоиду (которые иногда тоже называются циклоидами с добавкой: вытянутая, или сжатая), но у которых острые вершины сглажены (рис. 75) или заменены петлями (рис. 77). Приведенные здесь расчеты нетрудно обобщить на случай начальной прецессии, отличной от нуля.

91. Пример. Чтобы иметь некоторое понятие об относительных величинах прецессии и нутации, рассчитаем следующий пример. Пусть волчок сделан в виде диска со стержнем, вставленным в его центр. Радиус диска пусть будет  $\rho=4$  см, толщина его  $h=1$  см, расстояние центра тяжести от точки опоры пусть будет равно  $s=2$  см и длина оси  $l=8$  см. Что касается до плотности материала, из которого сделан диск,

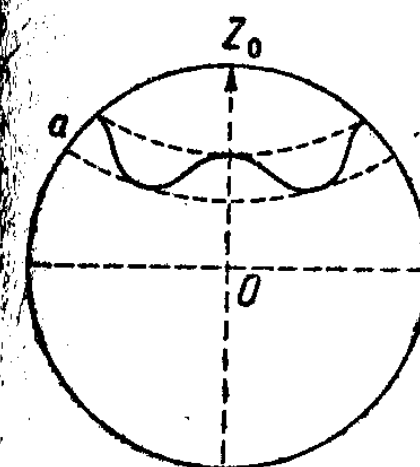


Рис. 75.

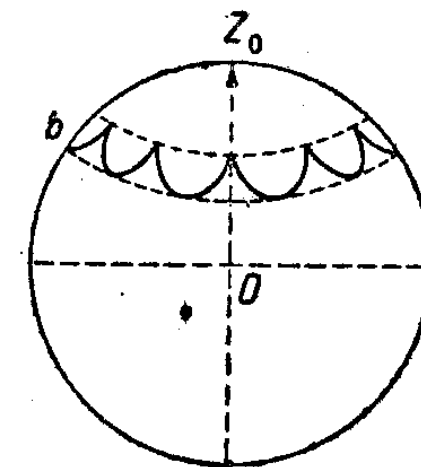


Рис. 76.

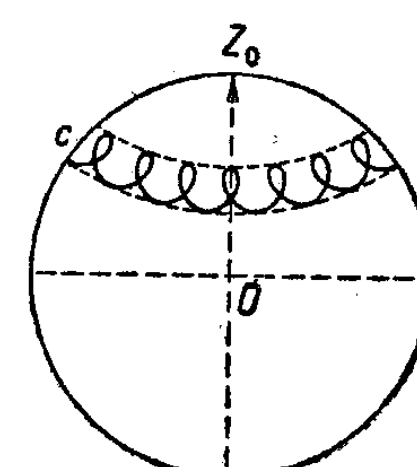


Рис. 77.

Различные типы прецессии с нутацией.

то мы ее обозначим через  $\delta$ ; числовая величина этой плотности у нас входить не будет.

Масса  $m$  и момент инерции диска вокруг оси симметрии волчка определяются формулами:

$$m = \pi \rho^2 \cdot h \delta; \quad C = \frac{1}{2} \rho^2 \cdot m; \quad \frac{m}{C} = \frac{2}{\rho^2}.$$

Момент инерции волчка вокруг горизонтальной оси, проходящей через опору, определяется по моменту инерции вокруг одного из диаметров диска с прибавлением произведения из массы на квадрат расстояния центра тяжести от опоры:

$$A = \frac{1}{4} \left( \rho^2 + \frac{1}{3} h^2 \right) m + s^2 m$$

При выбранных нами размерах оба момента инерции почти одинаковы, и мы можем написать:

$$A = C; \quad a = \frac{Cr}{A} = r.$$

Следовательно, частота нутаций равна угловой скорости вращения волчка.

Предположим, что мы сообщаем волчку быстрое вращение, например, 30 оборотов в секунду, и ставим его острием на подставку так, чтобы его ось составляла с вертикалью угол в  $30^\circ$  ( $\sin \vartheta_0 = 0,5$ ;  $\cos \vartheta_0 = 0,81$ ). На основании приведенных данных угловая скорость вращения волчка определится в

$$r = a - 30 \cdot 2\pi = 60\pi.$$

Амплитуда его нутаций будет равна

$$r_0 = \frac{l \cdot 2gs \sin \vartheta_0}{\rho^2 r^2} = \frac{8 \cdot 2 \cdot 980 \cdot 2 \cdot 1}{4^2 \cdot (60\pi)^2 \cdot 2} = 0,03 \text{ см.}$$

Каждый шаг циклоиды, описываемой концом оси волчка, равен

$$x_0 = 2\pi r_0 = 0,18 \text{ см.}$$

Как видим, обе эти величины настолько малы, что будут едва заметны на опыте.

Величина прецессии определится из формулы:

$$\dot{\psi} = \frac{mgs}{Cr} = \frac{2gs}{\rho^2 r} = \frac{2 \cdot 980 \cdot 2}{16 \cdot 60 \cdot \pi} = 1,3.$$

Это означает, что ось волчка будет делать один полный оборот по круг вертикали во время

$$T_\psi = \frac{2\pi}{\dot{\psi}} = 4,8 \text{ сек.}$$

Радиус круга прецессии равен  $l \sin \vartheta_0 = 4 \text{ см.}$  и длина окружности равна  $8\pi = 25 \text{ см.}$  Число шагов циклоиды, укладываемых на круг прецессии, мы можем получить, деля длину окружности на длину одного шага  $x_0$ , или деля период прецессии на период нутации, или деля  $a$  на  $\dot{\psi}$ , получаем (в круглых числах):

$$n = \frac{25}{0,18} = \frac{60 \cdot \pi}{1,3} = 145.$$

В заключение нам полезно будет подсчитать относительную величину двух членов бинома, который нам встретился на стр. 116, 88

$$(Cr)^2 - Amgs \cos \vartheta_0.$$

Чтобы упростить вычисления, мы можем вынести величину  $C^2$  из скобки, приняв во внимание, что у нас

$$A = C = \frac{1}{2} \rho^2 m.$$

Подставляя числовые значения, получаем в круглых числах:

$$C^2 \left[ r^2 - \frac{2gs \cos \vartheta_0}{\rho^2} \right] = C^2 [36\,000 - 180]$$

Мы видим, что второй член почти в 200 раз меньше первого, и им можно пренебречь, что мы и сделали на стр. 116, 88.

92. Псевдорегулярная прецессия. Приведенный нами пример очень типичен для тех быстро вращающихся волчков, которые встречаются в практике. Нутации волчка в большинстве случаев настолько малы, что они остаются незаметными, и прецессия представляется вполне регулярной. Однако на самом деле регулярная прецессия волчка, находящегося под действием момента силы тяжести, может наступить только при *особых* условиях (стр. 112, 86), между тем как в большинстве случаев момент силы тяжести произведет прецессию, сопровождаемую нутациями. Принимая это во внимание, условились нерегулярную прецессию, кажущуюся регулярной, называть *псевдорегулярной* прецессией.

Обратим внимание на следующее обстоятельство. Момент силы тяжести, действующий на вращающийся волчок, стремится повернуть ось волчка вокруг оси  $OM_0$  (рис. 73, 74), между тем как прецессия поворачивает ось волчка вокруг оси  $OZ$ . Оси  $OM_0$  и  $OZ$  перпендикулярны друг к другу, и наблюдателю, следящему за движением оси волчка, иногда кажется парадоксальным, что волчок отклоняется по направлению, перпендикулярному к действию силы. Но этот парадокс только кажущийся и объясняется тем, что наблюдатель не замечает нутаций.

Для того чтобы это утверждение стало как можно нагляднее, обратимся опять к упрощенным уравнениям нутаций (стр. 119, 89 в конце):

$$\ddot{\nu} + a\dot{\mu} = \frac{M_0}{A};$$

$$\ddot{\mu} - a\dot{\nu} = 0.$$

В этих уравнениях  $\nu$  представляет изменение угла  $\vartheta_0$  наклона оси волчка к вертикали, а  $\mu$  представляет изменение угла  $\chi$  поворота волчка вокруг оси  $OL$ , перпендикулярной к оси  $OZ$ ; следовательно, отклонения  $\nu$  и  $\mu$  взаимно перпендикулярны. Предположим, что в некоторый момент времени  $t=0$  волчок занимал положение, определяемое углом  $\vartheta_0$ , и никакой прецессии не было. Так как  $\dot{\chi} = \dot{\psi} \sin \vartheta$ , то в этот момент времени и  $\dot{\mu}$  было равно нулю, а потому для этого момента первое уравнение напишется так:

$$\ddot{\nu} = \frac{M_0}{A}.$$

Но это уравнение означает, что угол  $\vartheta$  начинает *увеличиваться*, т. е. что волчок начинает отклоняться *именно в ту сторону*, куда действует момент силы тяжести. Волчок и продолжал бы отклоняться в эту сторону, если бы он не вращался. Однако благодаря ускорению  $\ddot{\nu}$  у отклонения оси появится и некоторая скорость  $\dot{\nu}$ , а эта скорость  $\dot{\nu}$  на основании второго уравнения

$$\ddot{\mu} = a\dot{\nu}$$

сейчас же произведет ускорение  $\ddot{\mu}$ , и у волчка появится отклонение, *перпендикулярное* к первоначальному отклонению  $\nu$ . Далее, за ускорением  $\ddot{\mu}$

появится и скорость отклонения  $\dot{\mu}$ , которая согласно *первому* уравнению будет изменять величину нутации  $\chi$ . Получившееся изменение нутации, в свою очередь, изменит  $\dot{\mu}$  (а следовательно, и прецессию  $\dot{\phi}$ ) и т. д., и т. д. Таким образом вследствие постоянного взаимодействия отклонений  $\chi$  и  $\dot{\mu}$  верхний конец оси волчка будет описывать в пространстве циклоидальную кривую (рис. 78) и, таким образом, постепенно *прецессировать вперед*. Отдельные петли этой циклоиды так малы, что остаются незаметными, но результирующая прецессия, т. е. постепенное, хотя и медленное, увеличение угла  $\phi$ , обнаруживается вполне ясно.

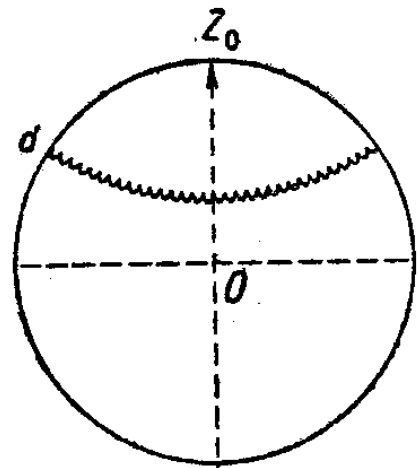


Рис. 78. Псевдорегулярная прецессия.

93. Волчок с неизменным моментом импульса. Очень часто, применяя теорию волчка к различным случаям техники, совсем не интересуются малыми нутациями и желают знать только *результирующую* прецессию. В таких случаях можно значительно упростить расчеты. Конечно, эти расчеты будут представлять только первое приближение, но это приближение будет тем точнее, чем быстрее и равномернее вращается волчок.

Предположим, действительно, что величина момента импульса волчка

$$K = Cr$$

остаётся *неизменной*. Не нужно забывать, что угловая скорость вращения  $r$  составлена из двух частей

$$r = \dot{\phi} + \dot{\phi} \cos \vartheta.$$

Первый член этой формулы представляет собственное вращение волчка вокруг его оси, тогда как второй член представляет проекцию прецессии  $\dot{\phi}$  на ось волчка.

Поэтому, если даже собственное вращение волчка поддерживается каким-либо образом (двигателем) постоянным, тем не менее всякое колебание или изменение величины прецессии  $\dot{\phi}$  и всякое изменение угла  $\vartheta$  уже влекут за собой и изменение величины  $r$ . Но, как уже сказано выше, мы будем предполагать, что все эти возможные изменения *ничтожно малы* по сравнению с быстротой  $\dot{\phi}$  собственного вращения волчка, и будем считать величину  $r$  неизменной при всяких условиях. Но если величина момента импульса  $K$  неизменна, а может изменяться только *направление* этого вектора, то уравнение моментов принимает простой вид (стр. 89, 70)

$$K' = 0; \quad M = [UK].$$

Здесь  $U$  означает угловую скорость поворота вектора  $K$ . Применяя эту формулу к волчку, подверженному моменту силы тяжести, мы должны положить:

$$M = mgs \sin \vartheta; \quad u = \dot{\phi}; \quad K = Cr;$$

и тогда получаем уравнение моментов:

$$mgs \sin \vartheta = \dot{\phi} \cdot Cr \sin \vartheta,$$

из которого непосредственно определяется величина (псевдорегулярной) прецессии:

$$\dot{\phi} = \frac{mgs}{Cr}$$

в согласии с тем, что мы нашли раньше (стр. 118, 88). Нутации не появились благодаря нашему упрощенному предположению.

Так как по самому смыслу векторного произведения вектор  $M$  перпендикулярен к векторам  $U$  и  $K$ , то и прецессия  $\dot{\phi}$  должна происходить вокруг оси, *перпендикулярной* к оси момента сил  $OM_{\vartheta}$ . Кроме того, направление  $M$  должно составлять с векторами  $U$  и  $K$  правовинтовую систему (рис. 79).

Приведенные здесь соображения настолько просты и наглядны, что ими часто пользуются в различных вопросах, где применяется теория волчка (см. следующую главу).

94. Принужденная прецессия и реактивный момент волчка. Формулу предыдущего параграфа мы можем применять и к тем случаям, когда момент сил  $M$  равен нулю, но вращающееся тело каким-либо способом принуждается к равномерной прецессии  $\dot{\phi}$ . Мы видели, что момент сил  $M$ , стремящийся *увеличить* угол  $\vartheta$ , служит причиной прецессии  $u$  по формуле:

$$M = [UK]; \quad u = \dot{\phi}.$$

Эту формулу мы можем толковать как равновесие двух моментов сил: *внешнего* момента сил  $M$  и *реактивного* момента —  $[UK]$ . Внешний момент сил  $M$  стремится *увеличить* угол  $\vartheta$ , следовательно, внутренний реактивный момент стремится *уменьшить* этот угол  $\vartheta$ ; в результате угол  $\vartheta$  остаётся неизменным. Как только мы устраним действие внешнего момента, но оставим неизменной прецессию  $\dot{\phi}$ , то угол  $\vartheta$  сейчас же начнет *уменьшаться*. Это рассуждение представляет собой не что иное, как одно из применений третьего закона механики Ньютона; действие равно и противоположно противодействию (ср.  $M_r$  и  $M_{\vartheta}$  на рис. 79).

Фуко выразил полученный нами результат следующим правилом: волчок, который принуждается к равномерной прецессии, стремится наклонить свою ось так, чтобы его собственное вращение стало параллельным принужденному вращению (т. е. чтобы уменьшить угол  $\vartheta$ ).

Обращаем внимание на то обстоятельство, что аналогичное правило мы имеем для магнитной стрелки: стрелка стремится стать своим магнитным полем *вдоль* линий сил внешнего поля. Магнитное поле аналогично угловой скорости принужденной прецессии, а магнитный момент

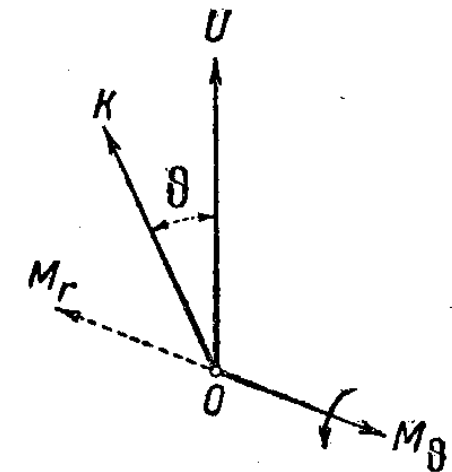


Рис. 79. Реактивный момент волчка.

стрелки аналогичен моменту импульса волчка. Формулы моментов для волчка и для магнитной стрелки одинаковы (см. общий курс „Электричество“, А. Эйхенвальд).

Очень часто в уравнениях движения волчка принужденную прецессию заменяют *эквивалентным* ей моментом сил. Из вышеизложенного непосредственно следует, что принужденная прецессия  $\Omega$  эквивалентна моменту

$$M_p = -[UK] = +[KU].$$

Эта формула нам пригодится при различных применениях теории волчка в главе VIII.

## ГЛАВА СЕДЬМАЯ

### ВРАЩЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКИ (МАЛЫЕ НУТАЦИИ)

95. Введение координаты  $\chi$ . При многих исследованиях движения волчка, а особенно при исследовании малых нутаций, бывает, удобно на место угловой скорости  $\dot{\phi}$  ввести в уравнения угловую скорость (как мы это уже делали: см. стр. 118, 89 и след.):

$$\dot{\chi} = \dot{\phi} \sin \vartheta.$$

Эта величина  $\dot{\chi}$  имеет простое геометрическое значение: она представляет собой проекцию угловой скорости  $\dot{\phi}$  на ось  $OL$  (ср. стр. 106, 80, рис. 70).

При введении этой величины в наши уравнения нам встретится и вторая производная по времени:

$$\ddot{\chi} = \ddot{\phi} \sin \vartheta + \dot{\phi} \dot{\vartheta} \cos \vartheta.$$

Пользуясь этими соотношениями, мы можем переписать первое уравнение моментов в следующей форме:

$$M_\vartheta = A\ddot{\vartheta} - A\dot{\chi}^2 \operatorname{ctg} \vartheta + C\dot{\chi}.$$

Второе уравнение мы тоже преобразуем таким образом: мы разложим момент  $M_\phi$  на два составляющих момента вокруг осей  $OL$  и  $OZ$  (ср. рис. 70):

$$M_\phi = M_\chi \sin \vartheta + M_\varphi \cos \vartheta.$$

Во всех случаях, которые мы будем разбирать ниже, момент сил вокруг оси симметрии волчка  $OZ$  будет у нас равным нулю, и мы можем положить:

$$M_\varphi = M_\chi \sin \vartheta.$$

Но если  $M_\varphi = 0$ , то и  $\dot{\chi} = 0$ , т. е. угловая скорость вращения волчка вокруг оси  $OZ$  остается *постоянной* (как это мы имели и выше). Приняв это во внимание, мы можем переписать второе уравнение (по сокращению на  $\sin \vartheta$ ) в таком виде:

$$M_\chi = A\ddot{\chi} + A\dot{\vartheta} \operatorname{ctg} \vartheta - C\dot{\vartheta}.$$

Третье уравнение (при  $M_\varphi = 0$ ) дает нам опять:

$$r = \text{const.}$$

96. Другой способ получения уравнений. Уравнения предыдущего параграфа можно получить и независимо от выводов предыдущей главы, исходя непосредственно из основного уравнения моментов:

$$\mathbf{M} = \mathbf{K}' + [\mathbf{uK}].$$

Мы уже пользовались этим уравнением при выводе уравнений Эйлера (стр. 89, 70), причем за оси координат мы принимали главные оси инерции тела. Эти оси участвуют во всех движениях тела, поэтому вектор  $\mathbf{u}$  представлял собой угловую скорость вращения *самого тела*. Теперь мы выберем оси координат  $ON$ ,  $OL$  и  $OZ$  (рис. 70; ср. рис. 71 стр. 106). Эти оси тоже не остаются в покое относительно внешнего неподвижного пространства; но они и не следуют за всеми движениями тела. Это видно уже на примере свободного волчка (стр. 109, 82), где оси  $ON$  и  $OL$  участвуют в регулярной прецессии, но не вращаются вокруг оси симметрии волчка. Поэтому теперь вектор  $\mathbf{u}$  уже не будет представлять собой угловую скорость вращения тела, а угловую скорость вращения выбранных нами осей координат.

Выбранные нами координаты участвуют в нутации и в прецессии; первое из этих движений имеет угловую скорость  $\dot{\vartheta}$  вокруг оси  $ON$ , а второе имеет угловую скорость  $\dot{\psi}$  вокруг вертикальной оси  $OZ_0$ . Поэтому для угловых скоростей вокруг осей  $ON$ ,  $OL$ ,  $OZ$  мы имеем выражения:

$$u_K = \dot{\vartheta}; \quad u_L = \dot{\psi} \sin \vartheta = \dot{\chi}; \quad u_Z = \dot{\psi} \cos \vartheta = \dot{\chi} \operatorname{ctg} \vartheta.$$

Если мы обозначим моменты инерции тела вокруг этих осей соответственно через

$$A, B, C,$$

то можем для проекций момента импульса на эти оси написать:

$$K_K = A\dot{\vartheta}; \quad K_L = B\dot{\chi}; \quad K_Z = C(\dot{\psi} + \dot{\chi} \operatorname{ctg} \vartheta) = Cr.$$

Составляем выражения для проекций векторного произведения, входящего в основное уравнение моментов, на оси  $ON$  и  $OL$ :

$$\begin{aligned} [\mathbf{uK}]_K &= u_L K_Z - u_Z K_L = \dot{\chi} \cdot Cr - \dot{\chi} \operatorname{ctg} \vartheta \cdot B\dot{\chi}; \\ [\mathbf{uK}]_L &= u_Z K_K - u_K K_Z = \dot{\chi} \operatorname{ctg} \vartheta A\dot{\vartheta} - \dot{\vartheta} \cdot Cr. \end{aligned}$$

Подставляем эти выражения в уравнения моментов:

$$\begin{aligned} M_\vartheta &= A\ddot{\vartheta} - B\dot{\chi}^2 \operatorname{ctg} \vartheta + Cr\dot{\chi}; \\ M_\chi &= B\ddot{\chi} + A\dot{\chi}\dot{\vartheta} \operatorname{ctg} \vartheta - Cr\dot{\vartheta}; \\ M_Z &= Cr = 0. \end{aligned}$$

Эти уравнения несколько *общее*, чем уравнения предыдущего параграфа, потому, что теперь моменты инерции  $A$  и  $B$  тела могут быть и неодинаковы. Кроме того, эти уравнения более *симметричны*, чем уравнения в эйлеровых координатах  $\psi$ ,  $\varphi$ ,  $\vartheta$ .

Мы можем для проверки результатов перейти обратно к эйлеровым координатам, положив в этих уравнениях

$$\begin{aligned} \dot{\chi} &= \dot{\psi} \sin \vartheta; & \ddot{\chi} &= \dot{\psi} \sin \vartheta + \dot{\psi} \cdot \dot{\vartheta} \cos \vartheta; \\ & & M_\chi \sin \vartheta &= M_\psi. \end{aligned}$$

Тогда получим:

$$\begin{aligned} M_\vartheta &= A\ddot{\vartheta} - B\dot{\psi}^2 \sin \vartheta \cos \vartheta + Cr\dot{\psi} \sin \vartheta; \\ M_\psi &= B\ddot{\psi} \sin^2 \vartheta + (A + B)\dot{\psi} \cdot \dot{\vartheta} \sin \vartheta \cos \vartheta - Cr\dot{\vartheta}; \\ M_\varphi &= Cr = 0. \end{aligned}$$

Эти уравнения при  $A = B$  совпадают с теми, которые мы получили в § 81.

97. Малые нутации быстро вращающегося волчка. Впрочем, и эти уравнения могут быть решены точно только в простейших случаях, и то при помощи эллиптических интегралов, а потому нам приходится довольствоваться приближенными решениями. Случай волчка, подверженного моменту силы тяжести, мы уже решали приближенным способом, предположив, что вращения волчка очень быстры. Но в следующей главе мы встретимся с несколько более общей задачей, имеющей важное техническое применение (волчок-компас), а потому нам полезно будет уже теперь подготовиться к ней, и притом в форме насколько возможно более общей.

Обозначим через  $\vartheta_0$ ,  $\dot{\chi}_0$ ,  $\dot{\psi}_0$  значения входящих в наши уравнения величин, соответствующие стационарным движениям, т. е. регулярной прецессии. Через  $\nu$  и  $\mu$  мы обозначим небольшие отклонения от стационарного движения. Тогда мы можем положить:

$$\vartheta = \vartheta_0 + \nu; \quad \dot{\chi} = \dot{\chi}_0 + \mu.$$

Первые члены этих сумм во всяком случае постоянны и не меняются со временем, а потому

$$\dot{\vartheta} = \dot{\nu}; \quad \ddot{\vartheta} = \ddot{\nu}; \quad \dot{\chi} = \dot{\mu}.$$

Вторые же члены суть величины настолько малые, что мы можем положить

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg}(\vartheta_0 + \nu) &= \frac{\cos \vartheta_0 \cos \nu - \sin \vartheta_0 \sin \nu}{\sin \vartheta_0 \sin \nu + \cos \vartheta_0 \cos \nu} = \operatorname{ctg} \vartheta_0 + \frac{1}{\sin^2 \vartheta_0} \nu; \\ \cos \nu &= 1; \quad \sin \nu = \nu. \end{aligned}$$

Соответственно с этим мы представим и моменты сил  $M_\vartheta$  и  $M_\chi$  в виде сумм:

$$M_\vartheta = M_{\vartheta_0} - D\nu; \quad M_\chi = M_{\chi_0} - E\mu,$$

в которых первые члены соответствуют стационарному движению и, следовательно, независимы от  $\nu$  и  $\mu$ , тогда как зависимость вторых членов настолько мала, что нам достаточно положить их пропорциональными соответствующим отклонениям. Если мы теперь подставим все эти величины в уравнения моментов, то величины, соответствующие стационар-



ному движению, взаимно уравновесятся, и у нас останутся только члены, зависящие от  $y$  и  $\mu$  и их производных по времени. Мы не будем выписывать этих членов, но нетрудно видеть, что при подстановке у нас получатся члены с произведениями  $\dot{\lambda}_0 y$ ,  $\dot{\lambda}_0 \mu$ ,  $\dot{\mu} y$ ,  $\dot{\lambda}_0 \dot{y}$ , которые мы можем откинуть по их малости в сравнении с членами  $Cr\dot{y}$  и  $Cr\dot{\mu}$ . Оставляя только члены с первыми степенями переменных, мы получим линейные уравнения:

$$\begin{aligned} A\ddot{y} + D\dot{y} + Cr\dot{\mu} &= 0; \\ B\ddot{\mu} + E\dot{\mu} - Cr\dot{y} &= 0. \end{aligned}$$

Написанные нами уравнения напоминают уравнения *связанных колебаний* (ч. II, стр. 139, 93). Однако в части II мы ограничились исследованием случая *упругой* связи (когда в уравнении для  $x$  входила координата  $y$ ) и случая *инерциальной* связи (когда в уравнение для  $x$  входила вторая производная  $y$ ); кроме того, мы ограничились более подробным исследованием *слабой* связи. Теперь мы имеем перед собой несколько иной случай: в уравнение одной из переменных входит *первая* производная по времени другой переменной; кроме того, здесь нас интересует именно случай *сильной* связи между  $y$  и  $\mu$ , выражающийся коэффициентом  $Cr$  (быстрое вращение волчка).

Имея в виду только что сказанное, мы займемся решением этих уравнений в общей форме.

98. Связанные колебания. Для того чтобы можно было непосредственно сравнить наши теперешние вычисления с теми, которые мы производили в части II (стр. 139, 93), мы напишем наши уравнения в такой форме:

$$\begin{aligned} \ddot{x} + a_1^2 x + k_1 \dot{y} &= 0; \\ \ddot{y} + a_2^2 y - k_2 \dot{x} &= 0. \end{aligned}$$

Здесь  $a_1$  и  $a_2$  означают частоты собственных колебаний каждой из двух связанных систем  $x$  и  $y$  в том случае, когда связи отсутствуют ( $k_1 = k_2 = 0$ ), и следовательно, имеют место уравнения:

$$\ddot{x} = -a_1^2 x; \quad \ddot{y} = -a_2^2 y.$$

Коэффициенты  $k_1$  и  $k_2$  характеризуют степень связи; произведение  $k_1 k_2$  мы будем обозначать через  $k^2 = k_1 k_2$ .

Задаемся решениями в форме (ср. стр. 110, 83):

$$x = A \cos at; \quad y = B \sin at.$$

Нетрудно видеть, что колебания *одинаковых* фаз не удовлетворили бы вышенаписанным уравнениям, а потому мы задались разностью фаз в  $90^\circ$ . Если бы мы задались решением в *комплексной* форме (ч. II, 148, 98), то это получилось бы у нас само собою. В прежних наших исследованиях связанных колебаний в части II у нас в уравнения движения входили или члены  $k_1 y$ , или члены  $k_2 \dot{y}$  (связи были или *упругие*, или *инерциальные*), теперь же мы имеем члены  $k\dot{y}$  с *первой* производной по вре-

мени; это именно и служит причиной появления разности фаз в  $90^\circ$ . Подставляя эти решения в дифференциальные уравнения, получаем:

$$\begin{aligned} A(a_1^2 - a^2) &= -k_1 a B; \\ B(a_2^2 - a^2) &= -k_2 a A. \end{aligned}$$

Перемножая оба уравнения друг на друга (для исключения амплитуд  $A$  и  $B$ ), получаем для частоты  $a$  биквадратное уравнение:

$$(a^2)^2 - a^2[a_1^2 + a_2^2 + k^2] + a_1^2 a_2^2 = 0,$$

из которого определяем

$$a^2 = \frac{1}{2} [a_1^2 + a_2^2 + k^2] \pm \frac{1}{2} \sqrt{[a_1^2 + a_2^2 + k^2]^2 - 4 a_1^2 a_2^2}.$$

Если же мы разделим одно уравнение на другое, то получим отношение амплитуд:

$$\left(\frac{A}{B}\right)^2 = \frac{k_1}{k_2} \frac{a_2^2 - a^2}{a_1^2 - a^2}.$$

Для определения *знака* этого отношения в различных частных случаях приходится обращаться к исходным уравнениям.

Итак, мы получили два различных значения для искомой частоты, которые мы обозначим через  $a'$  и  $a''$ , причем каждому значению  $a$  соответствует свое значение отношения между амплитудами. Поэтому мы можем написать наше решение в такой общей форме:

$$\begin{aligned} x &= A_1 \cos(a't + \alpha_1) + A_2 \cos(a''t + \alpha_2); \\ y &= B_1 \sin(a't + \alpha_1) + B_2 \sin(a''t + \alpha_2). \end{aligned}$$

Две из входящих в эти выражения амплитуды, а также и две фазы  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  определяются начальными условиями задачи.

99. Сильная связь между колебаниями. Коэффициент связи  $k$ , входящий в наши уравнения в применении их к волчку, будет содержать в себе множителем импульс волчка  $Cr$ ; в большинстве случаев величина  $Cr$  настолько велика, что мы можем несколько упростить форму решений, а именно: вынесем сумму  $[a_1^2 + a_2^2 + k^2]$  за скобки:

$$a^2 = \frac{1}{2} [a_1^2 + a_2^2 + k^2] \left[ 1 \pm \sqrt{1 - \frac{4 a_1^2 a_2^2}{[a_1^2 + a_2^2 + k^2]^2}} \right].$$

При большом значении  $k^2$  подкоренное выражение мало отличается от единицы, и мы можем применить приближенный способ извлечения корня:

$$a^2 = \frac{1}{2} [a_1^2 + a_2^2 + k^2] \left[ 1 \pm \left( 1 - \frac{2 a_1^2 a_2^2}{[a_1^2 + a_2^2 + k^2]^2} \right) \right].$$

При очень большом  $k^2$  мы можем даже удовольствоваться формулами:

$$(a')^2 = [a_1^2 + a_2^2 + k^2];$$

$$(a'')^2 = \frac{a_1^2 a_2^2}{[a_1^2 + a_2^2 + k^2]},$$

и для отношения амплитуд:

$$\left(\frac{A_1}{B_1}\right)^2 = \frac{k_1 a_1^2 + k^2}{k_2 a_2^2 + k^2}; \quad \left(\frac{A_2}{B_2}\right)^2 = \frac{k_1 a_2^2 (a_2^2 + k^2)}{k_2 a_1^2 (a_1^2 + k^2)}.$$

Наконец, если величина  $k^2$  очень велика по сравнению с частотами  $a_1^2$  и  $a_2^2$ , то мы можем еще более упростить наши формулы, откинув в суммах величины  $a_1^2$  и  $a_2^2$  по сравнению с величиною  $k^2$ ; тогда получим для частот:

$$a' = k, \quad a'' = \frac{a_1 a_2}{k}.$$

В этом случае, как видим, результирующие частоты будут очень сильно отличаться друг от друга: одна из них пропорциональна частоте вращения волчка  $\tau$ , тогда как другая обратно пропорциональна этой величине  $\tau$ . Такое сильное расхождение обеих частот колебаний обусловлено сильной связью между ними (ср. ч. II, стр. 139, 93).

Что касается амплитуд, то мы получаем при этих условиях:

$$\left(\frac{A_1}{B_1}\right)^2 = \frac{k_1}{k_2}; \quad \left(\frac{A_2}{B_2}\right)^2 = \frac{k_1 a_2^2}{k_2 a_1^2}.$$

Если коэффициенты  $k_1$  и  $k_2$  почти одинаковы, как это обыкновенно бывает в практических применениях, то амплитуды *большой* частоты в каждом из колебаний  $x$  и  $y$  тоже будут почти одинаковы, тогда как амплитуды *меньшей* результирующей частоты будут относиться друг к другу обратно пропорционально их основным частотам (которые имели бы место без связи).

Результаты, которые мы получили для сильных связей, неприменимы, конечно, непосредственно ко всем другим случаям, тем не менее они весьма поучительны и характерны для связанных колебаний.

100. Случай, когда основные частоты одинаковы. Исследование связанных колебаний значительно упрощается, если уже из условий задачи ясно, что частоты основных колебаний (т. е. при отсутствии связи) обеих систем одинаковы. Мы могли бы написать результаты для этого случая, воспользовавшись формулами предыдущего параграфа, положив в них  $a_1^2 = a_2^2$ . Но гораздо нагляднее будет, если мы решим этот случай независимо. Мы положим, кроме того, и  $k_1 = k_2$ :

$$\ddot{x} + a_1^2 x + k y = 0;$$

$$\ddot{y} + a_1^2 y - k x = 0.$$

Задаваясь решениями в форме

$$x = A \cos at; \quad y = B \sin at$$

и подставляя их в дифференциальные уравнения, мы получаем:

$$A(a_1^2 - a^2) = -kaB;$$

$$B(a_1^2 - a^2) = -kaA.$$

При делении этих уравнений друг на друга мы получаем, что

$$\frac{A}{B} = \pm 1.$$

Таким образом амплитуды оказываются равными. Что же касается до знака, то из вышенаписанных уравнений мы видим, что

$$\text{при } a > a_1 \quad A = +B,$$

$$\text{при } a < a_1 \quad A = -B.$$

Перемножая оба уравнения друг на друга и извлекая квадратный корень, имеем:

$$(a_1^2 - a^2) = \pm ka.$$

Двойной знак при  $k$  нам сейчас пригодится. Мы получим теперь квадратное уравнение (на место прежнего биквадратного), решение которого будет:

$$a = \frac{1}{2} [\mp k \pm \sqrt{k^2 + 4a_1^2}].$$

С математической точки зрения *любая* комбинация знаков в этой сумме допустима, и формула содержит в себе четыре решения. Однако мы должны выбирать только те знаки, при которых величина  $a$  *положительна*.

Итак, в рассмотренном случае мы имеем решения в виде:

$$x = A_1 \cos(a't + \alpha_1) + A_2 \cos(a''t + \alpha_2);$$

$$y = A_1 \sin(a't + \alpha_1) - A_2 \sin(a''t + \alpha_2).$$

Величины  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  зависят от начальных условий.

Если связь *очень сильная*, то удобно будет вынести величину  $k^2$  из-под знака квадратного корня:

$$\sqrt{k^2 + 4a_1^2} = k \sqrt{1 + \frac{4a_1^2}{k^2}},$$

и так как (при большом  $k^2$ ) под корнем мы имеем величину мало отличающуюся от единицы, то можем применить приближенный способ извлечения корня, написав:

$$a = \frac{1}{2} \left[ \mp k + k \left( 1 + \frac{2a_1^2}{k^2} \right) \right].$$

Так как величина  $a$  должна быть по смыслу своему положительна, то второму члену этой суммы мы должны приписать знак *плюс*; получаем два значения для частоты колебаний:

$$a' = k + \frac{a_1^2}{k}; \quad a'' = \frac{a_1^2}{k}.$$

В первой формуле мы можем второй член откинуть.

Другой крайний случай мы имеем, когда связь *очень слабая*. В таком случае удобно вынести из-под корня большую величину  $4a_1^2$  и опять применить приближенный способ извлечения корня. Получаем:

$$a = \frac{1}{2} \left[ \mp k \pm 2a_1 \left( 1 + \frac{k^2}{8a_1^2} \right) \right].$$

Снова в первом члене суммы мы должны сохранить оба знака, тогда как второй член может быть только положительным. Для частот получаем:

$$a' = a_1 + \frac{1}{2} k; \quad a'' = a_1 - \frac{1}{2} k.$$

При сильной связи обе частоты сильно отличались друг от друга, тогда как теперь, при слабой связи, разница между ними небольшая.

Бывают случаи, когда основные частоты  $a'$  и  $a''$  мнимы (система при отсутствии связи неустойчива) и  $a$  отрицательно.

**101. Пример.** Для того чтобы вычисления предыдущих параграфов приобрели большую наглядность, мы применим их к уже разобранному нами случаю волчка, находящегося под действием силы тяжести (стр. 116, 83). Момент сил тяжести равен (рис. 73):

$$M_g = mgs \sin \vartheta.$$

Подставляем сюда значение  $\vartheta = \vartheta_0 + \nu$ , где  $\nu$  — очень малая величина; при этом мы можем написать:

$$M_g = mgs \sin \vartheta_0 + mgs \cos \vartheta_0 \cdot \nu.$$

В прежних наших вычислениях мы вторым членом пренебрегали. Уравнения нутаций теперь напишутся так:

$$\begin{aligned} A\ddot{\nu} - mgs \cos \vartheta_0 \cdot \nu + Cr\ddot{\mu} &= mgs \sin \vartheta_0. \\ A\ddot{\mu} \dots - Cr\dot{\nu} &= 0. \end{aligned}$$

Применяя обозначения предыдущих параграфов, мы имеем:

$$a_1^2 = -\frac{mgs \cos \vartheta_0}{A}; \quad a_2^2 = 0; \quad k = \frac{Cr}{A}.$$

Первая из этих формул показывает, что при отсутствии связи (т. е. при  $r=0$ ) частота колебаний оказывается мнимой; другими словами, волчок совсем не будет совершать колебаний, а будет падать. Однако

при быстром вращении он устойчив и будет совершать нутации с частотой (стр. 144, при  $a_2=0$ ):

$$(a')^2 = [a_1^2 + k^2] = \frac{1}{A^2} [(Cr)^2 - Amgs \cos \vartheta_0].$$

Частота эта *действительная*, и волчок будет вращаться не падая, пока

$$(Cr)^2 > Amgs \cos \vartheta_0.$$

Однако не нужно забывать, что все наши вычисления приближенные и основаны на предположении, что быстрота вращения волчка *велика*. Поэтому определение минимальной быстроты  $r$  вращения волчка, при которой он уже перестает быть устойчивым, по этой формуле делать нельзя. Для этой цели пришлось бы вернуться к точным формулам § 86; но мы не считаем нужным останавливаться на этом.

Дальнейшие вычисления величин  $\vartheta$ ,  $\nu$ ,  $\mu$ ,  $\dot{\varphi}$  производятся, как на стр. 116, 88.

**102. Волчок-маятник.** Теперь предположим, что волчок прикреплен к стержню и подвешен в виде маятника (рис. 74). Пока волчок еще не приведен во вращение, такой маятник будет совершать колебания под влиянием силы тяжести, как всякий другой физический маятник. Частота колебаний его *при малых отклонениях* определяется формулой (стр. 76, 60):

$$(a_1)^2 = \left( \frac{2\pi}{T} \right)^2 = \frac{mgs}{A},$$

где  $A$  означает момент инерции маятника вокруг оси качания.

Если же мы приведем волчок во вращение, то получим совсем иные явления. При не особенно быстром вращении волчка маятник еще будет совершать колебания, однако его плоскость колебания не останется неизменной, а будет поворачиваться (как маятник Фуко: ч. II, 213, 141). Мы получим маятник с *прецессией*. Если же вращение волчка очень быстрое, то маятник совсем не будет совершать своих обычных колебаний, а останется только одна псевдорегулярная прецессия с небольшими нутациями, как в волчке.

Теоретически этот случай отличается от предыдущего только тем, что теперь угол  $\vartheta_0$  (рис. 74) тупой, тогда как в обыкновенном стоячем волчке он острый (рис. 73). Уравнения движения остаются те же:

$$\begin{aligned} A\ddot{\nu} - mgs \cos \vartheta_0 \cdot \nu + Cr\ddot{\mu} &= mgs \sin \vartheta_0; \\ A\ddot{\mu} \dots - Cr\dot{\nu} &= 0 \end{aligned}$$

Однако теперь благодаря тому, что угол  $\vartheta_0$  тупой, частота *собственных* колебаний (при отсутствии связи;  $\cos \vartheta_0 < 0$ ):

$$a_1^2 = -\frac{mgs \cos \vartheta_0}{A},$$

уже не будет мнимой. Эта частота представляет собой не что иное, как частоту колебания обыкновенного физического маятника, и формула наша

совпадает с той, которую мы написали выше. Действительно, малым отклонением маятника соответствует угол  $\vartheta_0$ , близкий к  $180^\circ$  (ср. рис. 74), и  $\cos \vartheta_0$ , близкий к  $-1$ .

Результирующая частота нутаций будет выражаться такой же формулой, как и в предыдущем параграфе:

$$(a')^2 = \frac{1}{A^2} [(Cr)^2 - Amgs \cos \vartheta_0],$$

однако, так как теперь  $\cos \vartheta_0 < 0$ , то частота будет немного больше. Впрочем, при быстрых вращениях второй член этой формулы мал по сравнению с первым, и мы можем для частоты нутаций (в обоих случаях) принять величину

$$a' = \frac{Cr}{A}.$$

Это совпадает с тем, что мы получили и прежде, откинув в уравнении нутаций член  $mgs \cos \vartheta_0$ . Напишем еще выражения для амплитуд нутаций и прецессии (ср. стр. 116, 88):

$$\nu_0 = \frac{mgs \sin \vartheta_0}{A(a')^2} = \frac{Amgs \sin \vartheta_0}{(Cr)^2 - Amgs \cos \vartheta_0};$$

$$\dot{\phi}_0 = \frac{Cr}{A} \frac{\nu_0}{\sin \vartheta_0} = \frac{Cr mgs}{(Cr)^2 - Amgs \cos \vartheta_0}.$$

И здесь мы можем откинуть второй член в знаменателе и написать

$$\nu_0 = \frac{Amgs \sin \vartheta_0}{(Cr)^2}; \quad \dot{\phi}_0 = \frac{mgs}{Cr};$$

тогда опять получим прежние результаты стр. 118.

103. Стоячий волчок при малых отклонениях от вертикали. Если бы мы применили формулы предыдущего параграфа к случаю медленных вращений волчка, то, как мы уже сказали (стр. 134, 101), мы получили бы неверные результаты. Мы можем теперь убедиться в этом. Положим, что вращение волчка  $r$  настолько медленно, что в формулах предыдущего параграфа мы можем членом  $(Cr)^2$  пренебречь по сравнению с членом  $Amgs \cos \vartheta_0$ . Тогда мы получаем для результирующей частоты и для амплитуды нутаций:

$$a' = \sqrt{\frac{-mgs \cos \vartheta_0}{A}}; \quad \nu_0 = -\operatorname{tg} \vartheta_0 = -\dot{\vartheta}_0.$$

Эти формулы те же, что и при отсутствии вращения ( $r=0$ ), и не содержат в себе ничего принципиально неверного. Между тем, если мы сделаем то же самое с формулой для прецессии, то получим:

$$\dot{\phi}_0 = \frac{-Cr}{A},$$

что неверно, как это мы сейчас покажем.

Вообще во всех предыдущих вычислениях мы предполагали, что волчок вращается быстро, и это позволило нам получить приближенные решения с достаточной точностью. Теперь мы не будем предполагать, что волчок вращается быстро, зато предположим, что ось волчка только незначительно отклоняется от вертикали. При таких условиях тоже можно получить приближенные формулы решений, причем эти формулы будут применимы как к случаям быстрых, так и к случаям медленных вращений волчка.

Прежде всего выясним вопрос о прецессии и обратимся для этого к уравнению момента импульса вокруг вертикальной оси  $OZ$  (стр. 108, 81):

$$K_\phi = A\dot{\phi} \sin^2 \vartheta + Cr \cos \vartheta = k = \text{const.}$$

Так как момент силы тяжести не имеет составляющей по вертикали, то момент импульса  $k$  остается постоянным. Предположим, что в начале движения ( $t=0$ ) волчок стоял вертикально; тогда момент импульса его был равен ( $\vartheta=0$ ):

$$Cr = k,$$

и эта величина остается постоянной и в последующие моменты движения, даже если мы толкнем ось волчка, сообщив ему небольшую скорость  $\dot{\vartheta}$ . При таком толчке мы прибавляем некоторый момент импульса вокруг оси  $OK$ , но момент импульса вокруг оси  $OZ$  остается неизменным.

Подставляем эту величину  $k$  в уравнение импульса и несколько преобразуем его:

$$\dot{\phi} = \frac{Cr(1 - \cos \vartheta)}{A(1 - \cos^2 \vartheta)} = \frac{Cr}{A(1 + \cos \vartheta)}.$$

До сих пор наши формулы вполне точны, но они не позволяют определить  $\dot{\phi}$  независимо от  $\vartheta$ ; а величина  $\vartheta$  нам пока еще неизвестна. Теперь воспользуемся тем, что величина отклонения  $\vartheta$  мала, и положим:

$$1 + \cos \vartheta = 1 + 1 - 2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2} = 2 \left( 1 - \frac{1}{4} \vartheta^2 \right).$$

Тогда мы можем для прецессии написать:

$$\dot{\phi} = \frac{Cr}{2A} \left[ 1 + \frac{1}{4} \vartheta^2 \right].$$

Второй член, стоящий в скобках, настолько мал по сравнению с единицей, что им можно пренебречь и положить

$$\dot{\phi} = \frac{Cr}{2A}.$$

Между тем как выше, при неверном расчете, мы получили величину вдвое большую. Как видим, наше первое приближение сводится к тому,

что мы отбрасываем небольшие изменения прецессии со временем и принимаем *псевдoreгулярную* прецессию за *регулярную*. Чтобы проверить себя, мы можем определить производную прецессии по времени:

$$\ddot{\phi} = \frac{Cr}{4A} \dot{\vartheta}^2,$$

откуда видим, что изменения прецессии со временем, действительно, очень малы.

Но если с самого начала принять, что прецессия равномерна, то из второго уравнения моментов (стр. 122, 81):

$$M_{\phi} = A\ddot{\phi} \sin^2 \vartheta + 2A\dot{\phi}\dot{\vartheta} \sin \vartheta \cdot \cos \vartheta - Cr\dot{\vartheta} \sin \vartheta = 0;$$

положив в нем  $\ddot{\phi} = 0$ , мы тоже получаем ( $\cos \vartheta = +1$ ):

$$\dot{\phi} = + \frac{Cr}{2A}.$$

Эту величину  $\dot{\phi}$  мы подставляем в первое уравнение моментов:

$$M_{\vartheta} = mgs \cdot \sin \vartheta = A\ddot{\vartheta} - A\dot{\phi}^2 \sin \vartheta \cos \vartheta + Cr\dot{\phi} \sin \vartheta$$

и, таким образом, получаем уравнение для нутаций ( $\sin \vartheta = \vartheta$ ;  $\cos \vartheta = 1$ ):

$$\ddot{\vartheta} = - \left[ \frac{(Cr)^2}{4A^2} - \frac{mgs}{A} \right] \vartheta.$$

Это — известное дифференциальное уравнение гармонических колебаний, и мы можем написать его решение в такой форме:

$$\vartheta = \nu_0 \sin at,$$

причем частота колебаний определится из формулы:

$$a = \frac{1}{2A} \sqrt{(Cr)^2 - 4Amgs}.$$

Эта формула верна при любых значениях скорости вращения волчка  $r$ , но при условии, что отклонения  $\nu_0$  незначительны. Из этой формулы мы видим, что волчок может устойчиво вращаться вокруг вертикальной оси лишь до тех пор, пока его скорость вращения  $r$  удовлетворяет неравенству

$$(Cr)^2 > 4Amgs.$$

Если вращение волчка замедлится еще более, то теоретически частота колебаний оси  $a$  делается *мнимой*: а практически это означает, что вертикально вращающийся волчок будет *неустойчив* и при малейшем толчке начнет *падать*.

104. Волчок-маятник при малых отклонениях. Совершенно тот же прием мы можем применить и к тому случаю, когда точка опоры волчка помещена *выше* его центра тяжести, т. е. когда волчок подвешен, как

маятник. В этом случае *малые* отклонения от вертикали будут означать, что угол  $\vartheta$  близок к  $180^\circ$ . Мы положим поэтому

$$\vartheta = 180^\circ - \alpha; \quad \sin \vartheta = \sin \alpha; \quad \cos \vartheta = -\cos \alpha.$$

Уравнение момента импульса вокруг вертикали напишется так:

$$k_{\phi} = A\dot{\phi} \sin^2 \vartheta + Cr \cos \vartheta = k.$$

Предположив, что в момент  $t=0$  маятник висел вертикально, мы имеем ( $\alpha=0$ ):

$$\sin \vartheta_0 = 0; \quad \cos \vartheta_0 = -1; \quad k = -Cr,$$

и эта величина  $k$  при отсутствии моментов сил вокруг вертикали остается и во все последующие моменты движения неизменной. Подставляя это значение в уравнение импульса, получаем:

$$\dot{\phi} = \frac{-Cr(1 - \cos \alpha)}{A(1 - \cos^2 \alpha)} = -\frac{Cr}{2A} \left[ 1 + \frac{1}{4} \alpha^2 \right].$$

Опять, как и в предыдущем параграфе, пренебрегаем небольшими изменениями прецессии и положим

$$\dot{\phi} = -\frac{Cr}{2A}.$$

Величина прецессии та же, как и для *стоячего* волчка, но она противоположного знака. Этот результат мы тоже могли бы получить из *второго* уравнения моментов, положив в нем  $\ddot{\phi} = 0$ .

Теперь введем угол  $\alpha$  в первое уравнение моментов, приняв во внимание, что

$$\vartheta = 180 - \alpha; \quad \dot{\vartheta} = -\dot{\alpha}; \quad \ddot{\vartheta} = -\ddot{\alpha}, \\ \sin \vartheta = \sin \alpha = \alpha; \quad \cos \vartheta = -\cos \alpha = -1.$$

Тогда первое уравнение моментов примет вид:

$$mgs \cdot \alpha = -A\ddot{\alpha} + A\dot{\phi}^2 \alpha + Cr\dot{\phi} \alpha,$$

и после подстановки значения  $\dot{\phi}$  даст нам дифференциальное уравнение для угла отклонения маятника:

$$\ddot{\alpha} = - \left[ \left( \frac{Cr}{2A} \right)^2 + \frac{mgs}{A} \right] \alpha; \quad \alpha = \nu_0 \sin at.$$

Мы получили гармонические колебания волчка-маятника с частотой

$$a = \frac{1}{2A} \sqrt{(Cr)^2 + 4Amgs}.$$

Амплитуда  $\nu_0$  этих колебаний зависит от силы первоначального толчка. Одновременно с этими колебаниями (*нутациями*) маятник будет совершать прецессию, величину которой мы определили выше. В следующем параграфе мы исследуем эти движения подробнее, а сейчас заметим только, что в рассматриваемом нами теперь случае частота  $a$  не может быть

минимое значение (как это мы имели в предыдущем параграфе), и движение подвешенного волчка будет всегда устойчиво, что ясно само собой.

105. Кривые, описываемые осью вертикального волчка. Интересно рассмотреть подробнее те кривые, которые начинает описывать ось волчка после сообщенного ей бокового удара.

Обозначим расстояние рассматриваемой точки  $P$  оси волчка от точки опоры через  $l$  (ср. рис. 83 и 86, 107); тогда расстояние ее от вертикальной оси будет равно  $l \sin \vartheta$ . Если мы опустим из этой точки перпендикуляр на горизонтальную плоскость  $XY$ , проведенную через точку опоры, то получим координаты точки  $P_1$  ( $\sin \vartheta = \vartheta$ ):

$$\begin{aligned} x &= l\vartheta \cos \psi; \\ y &= l\vartheta \sin \psi; \end{aligned} \quad \vartheta = v_0 \sin at.$$

Изменение  $x$  и  $y$  со временем и даст нам представление о движении оси волчка. Подставляем сюда значения  $\vartheta$  и  $\psi$  и получаем уравнение траектории точки в параметрической форме, причем параметром служит время  $t$ :

$$\begin{aligned} x &= r \sin at \cos \dot{\psi}t; \\ y &= r \sin at \sin \dot{\psi}t; \end{aligned} \quad r = lv_0.$$

Значения частот  $a$  и  $\dot{\psi}$  определяются формулами:

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{2A} \sqrt{(Cr)^2 \mp 4Amgs}; \\ \dot{\psi} &= \pm \frac{Cr}{2A}, \end{aligned}$$

причем верхние знаки относятся к случаю *стоячего* волчка, а нижние — к случаю *подвешенного* волчка.

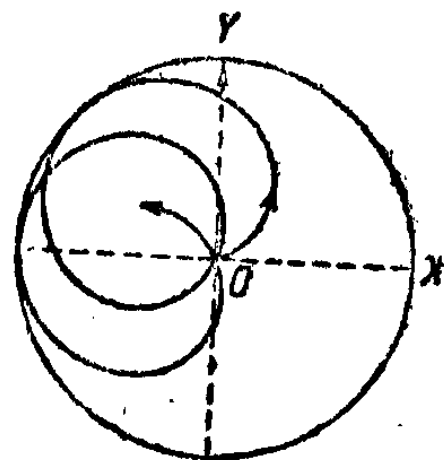


Рис. 80. Колебания стоячего волчка.

Форма этих кривых будет зависеть от соотношения между частотами  $a$  и  $\dot{\psi}$ . На рис. 80 изображена кривая, описываемая осью *стоячего* волчка при сравнительно быстром вращении; на рис. 81 изображена кривая *висящего* волчка при сравнительно медленном вращении.

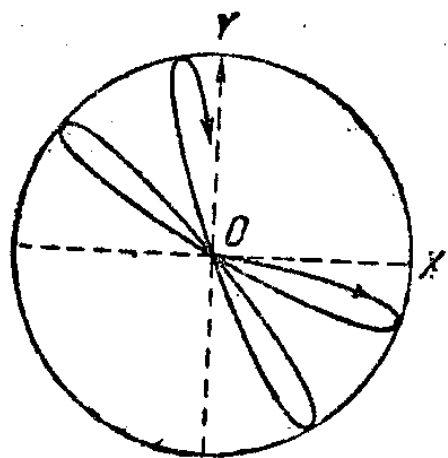


Рис. 81. Колебания висящего волчка.

Уравнения этих кривых можно написать и в такой форме:

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2} r \sin (a + \dot{\psi})t + \frac{1}{2} r \sin (a - \dot{\psi})t; \\ y &= -\frac{1}{2} r \cos (a + \dot{\psi})t + \frac{1}{2} r \cos (a - \dot{\psi})t. \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что *первые* члены этих сумм составляют вместе движение по кругу радиуса  $\frac{1}{2}r$  с угловой скоростью

$$+(a + \dot{\psi}).$$

Знак  $+$  мы поставили, чтобы показать, что вращение по кругу направлено в *положительную* сторону (как растут углы в тригонометрии); эту угловую скорость нужно представить себе отложенной по оси  $+OZ$ .

*Вторые* члены этих сумм составляют вместе тоже движение по кругу того же радиуса, но направленное в *противоположную* сторону; угловая скорость вращения равна

$$-(a - \dot{\psi}).$$

Таким образом полученные нами кривые можно образовать сложением двух взаимнопротивоположных *круговых* движений одинакового радиуса, но различных частот. Этим замечанием можно воспользоваться для более удобного черчения кривых.

106. Частный случай. Интересно применить полученные формулы к тому случаю, когда момент силы тяжести равен нулю (случай свободного волчка).

Положив  $mgs = 0$ , мы получаем для частоты нутаций:

$$a = \pm \frac{Cr}{2A} = \dot{\psi},$$

ту же величину, что и для прецессии, и уравнения траектории получают вид:

$$x = r \sin at \cos at = \frac{1}{2} r \sin 2at;$$

$$y = r \sin at \sin at = \frac{1}{2} r (1 - \cos 2at).$$

Нетрудно видеть, что эти формулы представляют собой уравнения круга, окружность которого проходит через начало координат и центр которого лежит на оси  $OY$  в расстоянии

$$y_0 = \frac{1}{2} r$$

от начала. Чтобы это было нагляднее, мы можем перенести начало координат в центр круга и написать

$$x = \frac{1}{2} r \sin 2at; \quad y' = y - \frac{1}{2} r = \frac{1}{2} r \cos 2at;$$

$$x^2 + (y')^2 = \frac{1}{4} r^2.$$

Два гармонических колебания по осям  $OX$  и  $OY$  одинаковой амплитуды и одинакового периода, но с разностью фаз в  $90^\circ$  дают вместе круговое движение.

Для *стоячего* волчка  $a$  положительно, и угловая скорость движения по кругу должна быть отложена по оси  $+OZ$ ; для *висячего* волчка та же угловая скорость  $a$  должна быть отложена по оси  $-OZ$ .

При этом является вопрос, что означает это различие в знаке  $a$ , когда в рассматриваемом случае на волчок совсем не действует момент силы тяжести, и разница между стоячим и висячим волчком пропадает. Это различие в знаке прецессии не зависит, конечно, от ориентировки волчка относительно *вертикали*, а зависит лишь от ориентировки оси волчка относительно выбранных нами осей координат. Если мы будем смотреть вдоль оси волчка по направлению вектора  $K = Cr$ , то прецессия во всех случаях будет *положительна*; если ось волчка направлена по оси  $+OZ$ , то и прецессия будет направлена по оси  $+OZ$ ; если же мы повернем ось волчка на  $180^\circ$  и направим ее по оси  $-OZ$ , то вместе с нею повернется и ось прецессии и ляжет тоже по направлению  $-OZ$ .

Рис. 82. Колебания свободного волчка.

Заметим, что расстояние центра описываемого круга от начала  $O$  соответствует половине амплитуды нутаций (рис. 82):

$$\frac{y_e}{l} = \frac{1}{2} \nu_0.$$

Далее, из написанных формул нетрудно (взяв производные по времени) определить скорость рассматриваемой точки

$$\dot{x} = ra \cos 2at; \quad \dot{y} = ra \sin 2at.$$

Следовательно, в начале движения, при  $t=0$  мы имели

$$\dot{x}_0 = ra; \quad \dot{y}_0 = 0;$$

и угловую скорость:

$$\dot{\vartheta}_0 = \nu_0 a = \nu_0 \frac{Cr}{2A}.$$

Толчок был направлен параллельно оси  $OX$ , и, следовательно, оси волчка был сообщен момент импульса вокруг оси  $OY$  величиной

$$K_y = A\dot{\vartheta}_0 = \frac{1}{2} Cr\nu_0.$$

Этот импульс сложился геометрически с первоначальным моментом импульса  $Cr$ , а потому угол отклонения результирующего импульса определится из формулы:

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{K_y}{Cr} = \frac{1}{2} \nu_0.$$

Мы видим, таким образом, что результирующий момент импульса будет направлен в центр того круга, который описывает толчок после

удара. Вокруг этого центра ось волчка будет вращаться с угловой скоростью

$$2a = \frac{Cr}{A}.$$

Таким образом в рассматриваемом случае нутация и прецессия волчка, произведенные толчком, слились вместе в одну *регулярную прецессию* оси волчка вокруг направления момента импульса.

Этот результат можно было предвидеть, потому что рассматриваемый нами теперь частный случай тождествен с тем, который рассматривали на стр. 110, 84.

107. Другой способ решения задачи о малых колебаниях вертикального волчка. Мы считаем чрезвычайно полезным рассмотреть малые колебания вертикального волчка еще раз, несколько иным, более наглядным способом.

Представим себе *висячий* волчок-маятник (полученные формулы нетрудно применить потом и к *стоячему* волчку) и возьмем начало неподвижных координат в точке привеса (рис. 83); направим оси  $OX$  и  $OY$  горизонтально и ось  $OZ$  вертикально *вверх*. Пока еще волчок не приведен во вращение, маятник может совершать свои колебания, оставаясь все время в одной и той же вертикальной плоскости. Возьмем какую-либо точку  $P$  на оси маятника, отстоящую от точки подвеса на расстоянии  $l$ ; проекция этой точки на плоскость  $XY$  будет иметь координатами (см. рис. 83):

$$\begin{cases} x = l \sin \alpha \cos \phi = la \cos \phi; \\ y = l \sin \alpha \sin \phi = la \sin \phi; \\ r = la. \end{cases}$$

Мы положили здесь  $\sin \alpha = a$ , имея в виду только *небольшие* отклонения маятника от вертикали. Обозначение  $r$  представляет расстояние рассматриваемой точки  $P$  от вертикальной оси.

Обозначим через  $A$  момент инерции маятника вокруг горизонтальной оси, проходящей через точку подвеса, через  $s$  — расстояние центра тяжести маятника от точки подвеса, через  $m$  — его массу и через  $g$  — ускорение силы тяжести. Тогда уравнение моментов даст нам (стр. 88, 60):

$$\begin{aligned} A\ddot{\alpha} &= -mgs \cdot \alpha; \\ A\ddot{r} &= -mgs \cdot r. \end{aligned}$$

Второе уравнение (в линейных мерах) получается из первого (в угловых мерах) умножением на  $l$ , так как отклонения мы предполагаем небольшими. Имея в виду, что во время вращения волчка, маятник уже не будет оставаться в одной и той же плоскости, мы составим проекции написанного уравнения на плоскости  $ZX$  и  $YZ$ ; получаем два уравнения:

$$\begin{aligned} A\ddot{x} &= -mgs \cdot x; \\ A\ddot{y} &= -mgs \cdot y. \end{aligned}$$

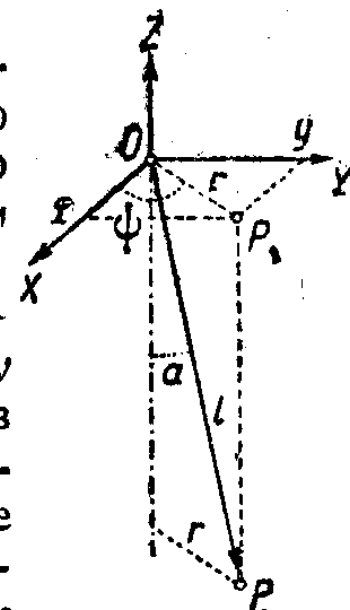


Рис. 83 Висячий волчок.

в соответствии с тем обстоятельством, что маятник имеет две степени свободы (ч. II, стр. 152, рис. 70, 100). Оба эти уравнения *независимы* друг от друга и показывают, что проекции маятника на плоскости  $ZX$  и  $YZ$  могут совершать *гармонические колебания* с одинаковыми частотами:

$$a_1 = a_2 = +\sqrt{\frac{mgs}{A}}.$$

Теперь предположим, что волчок приведен во вращение, т. е. что ему сообщили некоторый момент импульса  $K = Cr$ , направленный от точки подвеса к концу маятника. В момент  $t = 0$  этот вектор будет направлен по оси  $-OZ$ , и мы сообщаем маятнику небольшой толчок в направлении, параллельном оси  $OX$  (в плоскости  $ZX$ ). При вращающемся волчке маятник уже не будет следовать этому толчку и не будет сохранять свою плоскость колебания неизменной, а будет отклоняться в сторону под действием реактивного момента вращающегося волчка, который определяется формулой (стр. 144, 94):

$$M_r = [KU],$$

где  $U$  означает угловую скорость поворота оси волчка во время качаний маятника. Если мы обозначим проекции угловой скорости отклонения маятника на оси  $OX$  и  $OY$  через  $\dot{a}_x$  и  $\dot{a}_y$ , то величины проекций реактивного момента на те же оси будут  $Cr\dot{a}_x$  и  $Cr\dot{a}_y$ . Что же касается знака этих проекций, то их, правда, можно тоже определить из вышенаписанного векторного уравнения, но гораздо проще (и *нагляднее*) будет, если мы определим их, основываясь на правиле Фуко (стр. 125, 94). По правилу Фуко волчок всегда отклоняется в сторону оси принужденного вращения.

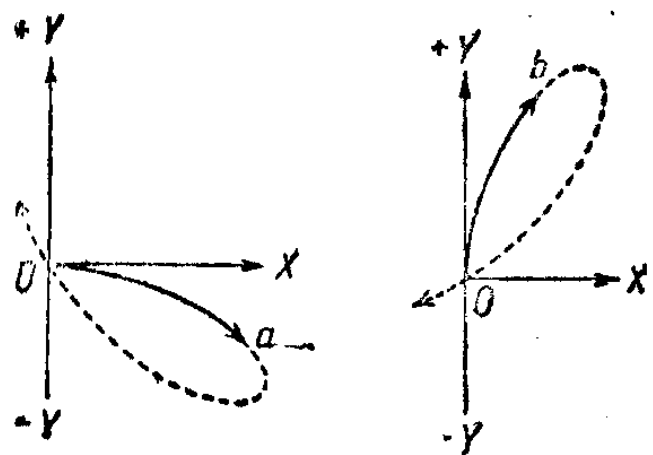


Рис. 84 и 85. Отклонения висящего волчка.

Итак, предположим, что маятник движется вдоль оси  $+OX$  (рис. 84) и, следовательно, имеет угловую скорость вращения вокруг оси  $-OY$  равную  $-\dot{a}_y$ . Тогда по правилу Фуко волчок заставит маятник отклоняться тоже по направлению оси  $-OY$ , и конец маятника, вместо того, чтобы следовать первоначальному толчку и идти вдоль оси  $+OX$ , свернет в сторону по линии  $Oa$ , (будет сворачивать *вправо*).

Мы можем описать это явление количественно, сказав, что у маятника появляется ускорение вдоль оси  $-OY$  величиной

$$M_{ry} \cdot l = -Cr \dot{x}.$$

Здесь мы тоже, умножив на  $l$ , перешли от углового ускорения к линейному.

Совершенно таким же образом, применяя правило Фуко, мы приходим к заключению, что при движении маятника параллельно оси  $+OY$ , т. е. при вращении вокруг оси  $+OX$  (см. рис. 85), реактивный момент

волчка заставит маятник двигаться — отклониться к оси  $+OX$  и описать кривую  $Ob$  (отклониться *вправо*). Следовательно, у маятника появится ускорение вдоль оси  $OX$  величиной

$$M_{rx} \cdot l = +Cr \dot{y}.$$

На основании этих соображений мы должны изменить первоначальные уравнения движения маятника, прибавив к ним определенные выше реактивные моменты и написать их таким образом:

$$\begin{aligned} A\ddot{x} &= -mgs \cdot x + Cr\dot{y}, \\ A\ddot{y} &= -mgs \cdot y - Cr\dot{x}. \end{aligned}$$

Деля эти уравнения на  $A$  и перенося все члены в одну сторону, мы получаем:

$$\begin{aligned} \ddot{x} + a_1^2 x + k\dot{y} &= 0; \\ \ddot{y} + a_2^2 y - k\dot{x} &= 0. \end{aligned}$$

причем мы ввели обозначения

$$a_1^2 = a_2^2 = \frac{mgs}{A}; \quad k = -\frac{Cr}{A}.$$

Мы имеем перед собой уравнения связанных колебаний (стр. 132, 100), причем основные колебания (при  $k = 0$ ) обеих систем одинаковы. Мы можем целиком применить уже полученные нами формулы и написать для результирующих частот (см. стр. 132, 100):

$$\left. \begin{aligned} a' \\ a'' \end{aligned} \right\} = \frac{1}{2} \left[ \mp k + \sqrt{k^2 + 4a_1^2} \right]$$

(мы выбрали те знаки, которые дают для частоты  $a'$  и  $a''$  положительное значение). Что касается амплитуд и фаз результирующих колебаний, то они (как всегда) зависят от начальных условий. Мы предположили, что в момент  $t = 0$  маятник висел вертикально и ему сообщен небольшой толчок параллельно оси  $OX$ . При таких условиях мы должны написать решения в виде (см. стр. 133, 100):

$$\begin{aligned} x &= A_1 \sin a't + A_1 \sin a''t, \\ y &= -A_1 \cos a't + A_1 \cos a''t. \end{aligned}$$

Эти формулы мы можем представить и таким образом:

$$\begin{aligned} x &= r_0 \cdot \sin \frac{a' + a''}{2} t \cos \frac{a' - a''}{2} t; \\ y &= r_0 \cdot \sin \frac{a' + a''}{2} t \sin \frac{a' - a''}{2} t. \end{aligned}$$

Подставляя сюда значения  $a'$  и  $a''$ , получаем:

$$\begin{aligned} x &= r_0 \sin at \cos \phi t; \\ y &= r_0 \sin at \sin \phi t. \end{aligned}$$



где

$$a = \sqrt{\frac{k^2}{4} + a_1^2} = \sqrt{\left(\frac{Cr}{2A}\right)^2 - \frac{mgs}{A}};$$

$$\dot{\phi} = -\frac{1}{2}k = -\frac{Cr}{2A}$$

в полном согласии с прежним результатом (стр. 140, 105).

Мы предлагаем читателю самому повторить вычисления для случая стоячего волчка (рис. 86) и дадим только следующие краткие указания.

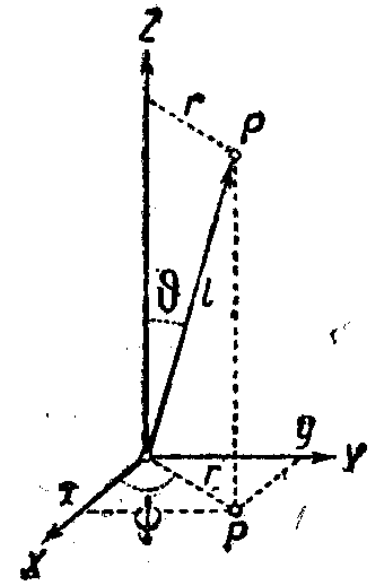


Рис. 86. Стоячий волчок.

Для *стоячего* волчка уравнение моментов при отклонении на малый угол  $\vartheta$  дает

$$A\ddot{\vartheta} = +mgs \cdot \vartheta.$$

В этом случае частота колебаний при отсутствии вращения о-азывается *мнимой*; волчок неустойчив.

Применяя правило Фуко, мы имеем следующее. При движении конца волчка по направлению оси  $+OX$  (рис. 86), т. е. при повороте его вокруг оси  $+OY$ , возникает реактивный момент, наклоняющий волчок к этой оси  $+OY$ , и следовательно, конец оси волчка вместо того, чтобы следовать первоначальному отклонению вдоль оси  $OX$ , будет отклоняться по

направлению к оси вынужденного вращения  $+OY$  и опишет линию  $Oa$  (рис. 87); (стоячий волчок свернет влево, тогда как *висячий* маятник сворачивал *вправо*) (ср. рис. 87 и рис. 84). Точно так же при

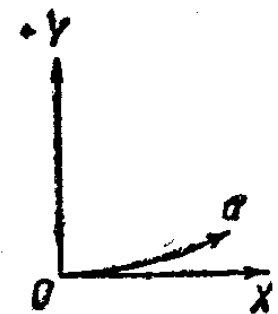


Рис. 87. Отклонения стоячего волчка.

движении вдоль оси  $+OY$  (это соответствует вынужденному повороту вокруг оси  $-OX$ ) волчок под действием реактивного момента должен будет наклониться в сторону этой оси  $-OX$  и описать кривую  $Ob$  (рис. 88 ср. с рис. 85), т. е. опять свернуть *влево*.

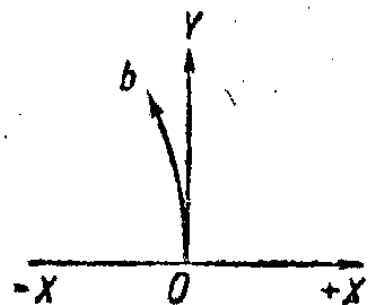


Рис. 88. Отклонения стоячего волчка.

Таким образом, руководствуясь правилом Фуко, мы непосредственно видим, почему для стоячего волчка прецессия *положительна*, тогда как для висячего

волчка прецессия отрицательна (стр. 136, 103, стр. 138, 104) (ср. рис. 86, 87, 88 с рис. 83, 84, 85).

Возвращаясь к разбираемому случаю стоячего волчка, мы видим, что уравнения напишутся теперь в таком виде;

$$A\ddot{x} = mgs \cdot x - Cr\dot{y}; \quad a_1^2 = a_2^2 = -\frac{mgs}{A}.$$

$$A\ddot{y} = mgs \cdot y + Cr\dot{x};$$

Основные частоты, при отсутствии связи, здесь *мнимы*, а потому (стр. 133, 100) для результирующих частот мы должны выбрать знаки при членах суммы иные, чем для висячего волчка-маятника, а именно:

$$\left. \begin{matrix} a' \\ a'' \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} \left[ +k \pm \sqrt{k^2 + 4a_1^2} \right].$$

Если мы напишем решения в таком виде:

$$x = r_0 \sin at \cos \phi t;$$

$$y = r_0 \sin at \sin \phi t,$$

то частоты нутаций и прецессии будут иметь значение:

$$a = \sqrt{\left(\frac{Cr}{2A}\right)^2 - \frac{mgs}{A}};$$

$$\dot{\phi} = \frac{1}{2}k = +\frac{Cr}{2A},$$

тоже в согласии с прежними результатами.

ПРИМЕНЕНИЯ ТЕОРИИ ВОЛЧКА

108. Сопоставление результатов теории. В предыдущих трех главах мы изучали движение твердого тела вокруг неподвижной точки, причем пользовались тремя системами координат:

1) *Декартовыми координатами*, неизменно связанными с материальными точками тела и проведенными по главным его осям инерции. Эти координаты участвуют во всех движениях тела. Мы получили так называемые эйлеровы уравнения движения (стр. 89, 70). Общих решений для этих уравнений мы не имеем, но в частном случае, когда внешние моменты сил равны нулю, уравнения Эйлера решаются при помощи эллиптических функций. Мы ограничились более подробным изложением теории *волчка*, т. е. тела, у которого два главных момента инерции одинаковы (у которого эллипсоид инерции есть эллипсоид вращения); в таком случае эллиптические функции переходят в круговые.

2) Угловыми координатами Эйлера  $\vartheta$ ,  $\phi$ ,  $\psi$ , определяющими положение вращающегося тела относительно *неподвижных* декартовых координат, уравнения движения в этих координатах (стр. 108, 81) мы опять применили к случаю свободного волчка. Если волчок подвержен действию момента силы тяжести, то уравнения моментов решаются при помощи эллиптических интегралов, но мы ограничились приближенными решениями. С математической точки зрения было бы лучше применить те или другие приближенные расчеты к самим эллиптическим интегралам, но мы избежали этого, откинув некоторые сравнительно малые величины в самих уравнениях движения; при этом мы исходили из предположения, что скорость вращения волчка *очень велика*. Такой способ расчета для практических целей вполне достаточен.

3) Наряду с координатами Эйлера мы применяли несколько иные координаты  $\vartheta$ ,  $\chi$ ,  $\psi$ , которые не остаются неподвижными в пространстве, но и не участвуют во всех движениях тела. Уравнения движения в этих координатах часто встречаются в литературе, и мы считали необходимым дать о них понятие. Более симметричная форма этих уравнений позволила нам упростить решение вопроса о нутациях быстро вращающегося волчка.

В предыдущей главе мы рассмотрели движение волчка с точки зрения теории *связанных колебаний* о двух степенях свободы.

Все наши приближенные вычисления основывались на предположении, что волчок *вращается очень быстро*, однако для случая вертикально стоящего или висящего волчка мы могли и не делать этого предположения, а основывать приближенные расчеты на том обстоятельстве, что *отклонения* оси волчка от вертикали *незначительны*. Поэтому в тех случаях, когда вращение волчка медленное, а отклонения оси волчка от вертикали значительны, наши приближенные расчеты терпят свою силу;

в таких случаях необходимо прибегать к другим методам расчета, о которых мы здесь не нашли возможным распространяться и которые читатель в случае надобности может найти в специальных сочинениях.

Главнейшие результаты теории можно описать вкратце следующим образом. Когда на твердое тело не действуют никакие внешние моменты сил, то момент импульса тела остается постоянным как по величине, так и по направлению. Если момент импульса и угловая скорость вращения тела совпадают с одною из главных осей инерции тела, то движение может быть *стационарным*, и ось вращения остается неизменной в пространстве. Однако *устойчивым* такое движение может быть только при условии вращения вокруг оси *наибольшего* или вокруг оси *наименьшего* момента инерции тела; вокруг оси среднего момента инерции вращение *неустойчиво* (стр. 92, 73). В большинстве случаев векторы момента импульса и угловой скорости вращения тела не будут совпадать друг с другом, и тогда вращение тела вокруг неподвижной точки нагляднее всего описывается способом Пуансо (95, 74), а именно — качением эллипсоида энергии по плоскости, перпендикулярной к направлению момента импульса, или качением конуса полодии по конусу герполодии. Для волчка (для тела с двумя равными главными моментами инерции) оба эти конуса круговые (стр. 97, 76). При этом ось волчка описывает вокруг направления момента импульса круговой конус с равномерной угловой скоростью; это называется *регулярной прецессией* свободного волчка.

Обозначим моменты инерции волчка вокруг главных осей, проходящих через неподвижную точку, через  $C$  и  $A=B$ . Тогда, если начальные условия движения волчка таковы, что угловая скорость  $\omega$  его вращения образует с осью  $C$  некоторый угол  $\alpha$ , то момент импульса  $K$  образует с осью волчка угол  $\vartheta$ , определяемый формулой (стр. 97, 76; стр. 109, 82):

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{A}{C} \operatorname{tg} \alpha,$$

и ось волчка описывает вокруг направления  $K$  конус прецессии с угловой скоростью

$$\dot{\vartheta} = \frac{Cr}{A \cos \vartheta}.$$

Как видим, регулярная прецессия свободного волчка возможна при всяких начальных условиях; только в исключительных случаях, когда вектор  $\omega$  направлен по одной из главных осей инерции, прецессия пропадает.

Нечто иное мы имеем при действии момента силы тяжести. Здесь тоже возможна *регулярная* прецессия (стр. 112, 86), однако для этого *начальные условия* должны быть подобраны особым образом: они должны удовлетворять уравнению:

$$mgs = -A\dot{\vartheta}^2 \cos \vartheta + Cr\dot{\varphi}.$$

Если начальные условия не удовлетворяют этому уравнению, то под действием момента силы тяжести возникают *нутации*, и прецессия перестает быть регулярной.

Регулярные прецессии волчка под действием момента силы тяжести представляют собой *устойчивые* движения. Если мы сообщим волчку толчок, изменяющий угол  $\vartheta$ , то вблизи регулярной прецессии возникнут небольшие нутации, и сама прецессия уже перестанет быть равномерной (регулярной), а будет сопровождаться небольшими ускорениями и замедлениями. Частота нутаций и частота изменения прецессии определяются формулой (стр. 117, 88):

$$a = \frac{Cr}{A}$$

Однако мы можем поставить волчок на подставку, не сообщив ему никакой начальной прецессии (при этом момент импульса и угловая скорость вращения должны быть направлены по оси волчка). Тогда под действием момента силы тяжести волчок *начнет* совершать нутации и начнет прецессировать вокруг вертикальной линии, проходящей через точку опоры (стр. 118, 88, 89). Частота этих нутаций опять равна:

$$a = \frac{Cr}{A}$$

Как видим, частота и период нутации зависят только от свойства самого волчка (моменты инерции, скорость вращения), а момент силы тяжести только возбуждает эти *собственные* колебания системы (аналогично смычку, возбуждающему собственные колебания скрипичной струны).

Что же касается до *прецессии*, возбуждаемой моментом силы тяжести, то она по существу своему *нерегулярна* (стр. 123, 92). Однако, чем быстрее вращается волчок, тем быстрее происходят колебания прецессии и нутации, тем меньше делается их амплитуда. При очень быстром вращении нутации и изменения прецессии делаются незаметными, и прецессия *кажется* регулярной. Она носит название *псевдoreгулярной* прецессии.

Если волчок вращается *очень быстро*, то можно пренебречь явлениями нутаций и определить величину псевдoreгулярной прецессии непосредственно из формулы (стр. 124, 93):

$$M = [UK]; \quad U = \dot{\phi} = \frac{mgs}{Cr}$$

В этой главе мы приведем целый ряд примеров вращающихся тел, которые, правда, не называются волчками, но к которым применима теория волчка, изложенная в предыдущих трех главах. Применение этой теории облегчается здесь тем обстоятельством, что технические волчки (вращающиеся колеса, двигатели, пропеллеры и т. п.) обыкновенно обладают сравнительно *большой* скоростью вращения. Часто эти „волчки“ установлены на телах, находящихся в движении, и подвергаются *вынужденным* поворотам оси вращения (вынужденная прецессия). При исследовании и подсчетах происходящих при этом явлений большую пользу может оказать простое и наглядное правило Фуко (стр. 125, 94), а также формула реактивного момента волчка:

$$M_r = [KU]$$

109. Волчки и жирокопсы. Явления, рассмотренные нами в предыдущих главах теоретически, чрезвычайно полезно проследить *на опыте*; от этого и сама теория делается более наглядной, и применение теории к различным частным случаям, встречающимся в технике, станет более легким.

Для опытов можно воспользоваться любым игрушечным волчком, имеющимся под рукой, хотя для более подробного изучения явления и для демонстрации в аудитории сконструированы специальные волчки, называемые иногда *жирокопсами*. В переводе на русский язык жирокоп означает прибор для наблюдения („скоп“) вращения („жиро“), причем первоначально под этим подразумевалось наблюдение *вращения Земли*, так как Фуко показал, что волчок, подобно маятнику (ч. II, стр. 213, 141), может служить для доказательства вращения Земли (см. ниже 116). С тех пор это название сохранилось для научных волчков во французской, итальянской и русской литературе, но мы в этой книге последовали примеру англичан и немцев (top, Kreisell) и применяем более общий термин, *волчок*, оставляя название *жирокоп* для прибора Фуко.

На рис. 89 изображена схема колоколообразного волчка, форма которого выбрана так, чтобы его можно было подпереть в самом центре тяжести  $C$  или только немного ниже центра тяжести. Исключив таким образом, насколько это возможно, действие момента силы тяжести, мы можем наблюдать регулярную прецессию волчка при различных начальных условиях. Если ввинтить или вывинтить стержень  $A$ , вставленный вдоль оси волчка, то мы получим волчок под действием момента силы тяжести и можем наблюдать псевдoreгулярную прецессию.

Более сложная конструкция, но зато и более совершенная, изображена на рис. 90. Это — так называемый *подвес Кардана*, употребляемый нередко и в технике. Ось волчка  $OZ$  вставлена своими концами в подшипники  $z_2$ , устроенные в легком обруче  $aa$ . Подшипники устраиваются или в виде остриев, или в виде углублений, в которые входят острия оси волчка; в последнее время на место этих остриев (керы) стали употреблять шариковые подшипники, которые в смысле устранения трения более

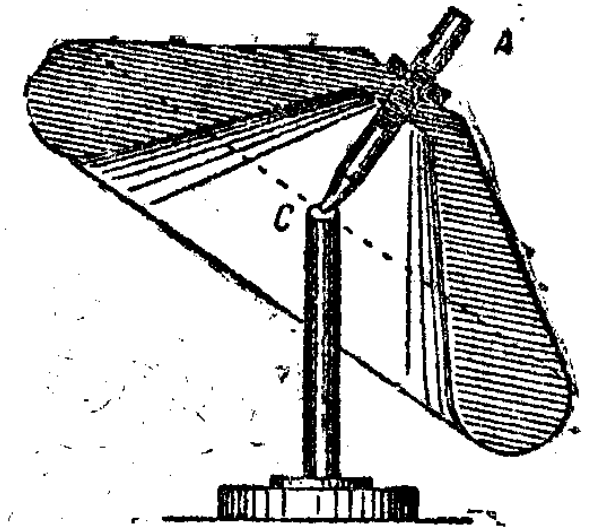


Рис. 89. Колоколообразный волчок.

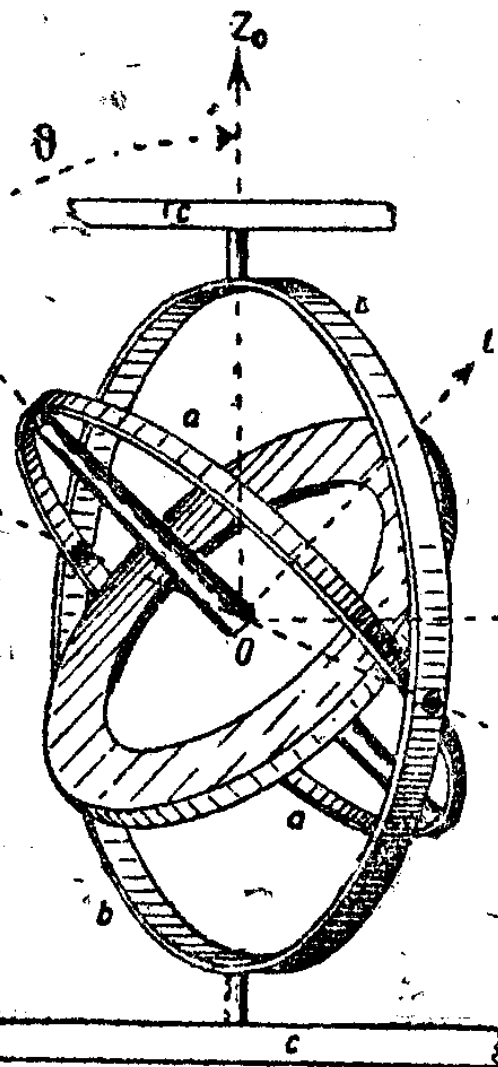


Рис. 90. Жирокоп на подвесе Кардана.

Эта конструкция, изображенная на рис. 90, — так называемый *подвес Кардана*, употребляемый нередко и в технике. Ось волчка  $OZ$  вставлена своими концами в подшипники  $z_2$ , устроенные в легком обруче  $aa$ . Подшипники устраиваются или в виде остриев, или в виде углублений, в которые входят острия оси волчка; в последнее время на место этих остриев (керы) стали употреблять шариковые подшипники, которые в смысле устранения трения более

совершенны, чем керны. Обруч  $aa$  тоже имеет свою ось  $NN$ , расположенную перпендикулярно к оси волчка  $OZ$  и вставленную в такие же подшипники другого обруча несколько большего диаметра  $bb$ . Наконец, и этот обруч  $bb$  снабжен осью  $Z_0Z_0$ , перпендикулярной к предыдущей оси  $NN$ , и вставлен или в третий обруч, или, как у нас показано на рис. 90, в неподвижную раму  $cc$ . Благодаря указанным трем обручам ось волчка может свободно принимать любое направление в пространстве. На рис. 90 показано одно из таких положений, причем обозначены и соответствующие координаты Эйлера. Если читатель сравнит рис. 90 с рис. 70 стр. 106, то он увидит, что подвес Кардана как нельзя более подходит к координатам Эйлера, обруч  $bb$  может свободно поворачиваться вокруг вертикальной оси  $OZ_0$  и описывать углы  $\vartheta$ ; ось  $NN$  обруча  $aa$  представляет собой линию узлов и позволяет придавать оси волчка  $OZ$  любой наклон  $\vartheta$ , и, наконец, сам волчок, вращаясь вокруг оси  $OZ$ , описывает углы  $\varphi$ . Углы  $\vartheta$ ,  $\varphi$  и  $\varphi$  представляют собой координаты Эйлера.

Соответствующей регулировкой подшипников всех осей можно достигнуть того, что центр тяжести волчка (который при тщательной выделке помещается точно на оси вращения) будет приходиться и на оси  $NN$  и на оси  $OZ_0$ . Вообще нужно постараться, чтобы центр тяжести волчка (включая и подвижные обручи) помещался как можно точнее в центре карданова привеса, т. е. в точке пересечения трех осей  $OZ_0$ ,  $OZ$ ,  $ON$ . Если это достигнуто, то волчок будет в любом положении в безразличном равновесии.

Пустив волчок в ход и сообщив его оси небольшой удар (стр. 110, 84), можно наблюдать регулярную прецессию. Прикрепив к ободу  $aa$  волчка небольшой груз, мы получаем момент силы тяжести вокруг центра карданова подвеса, вследствие чего вращающийся волчок начнет совершать псевдoreгулярную прецессию и т. д.

Для целей демонстрации описанный выше карданов подвес можно упростить тем, что на место обруча  $bb$  применить только верхнюю его половину и подвесить ее на нити  $OZ_0$ .

На рис. 91 и 92 изображен обыкновенный волчок, который легко найти в продаже и с которым можно произвести много поучительных опытов. Он имеет только один обруч  $aa$  (меридиан), в котором вставлена ось

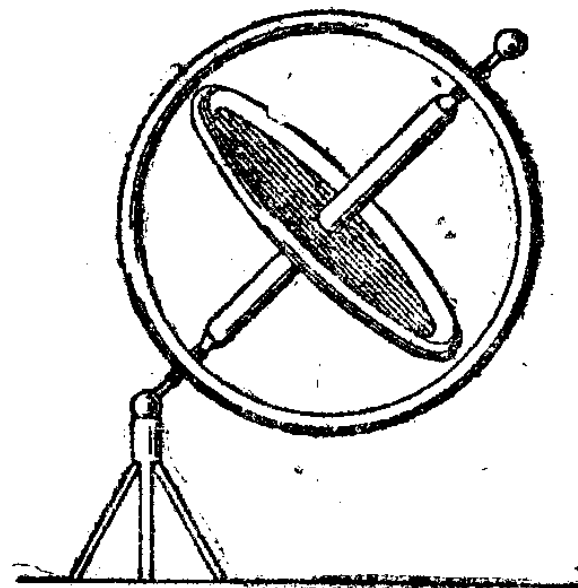


Рис. 91. Обыкновенный волчок на подставке.

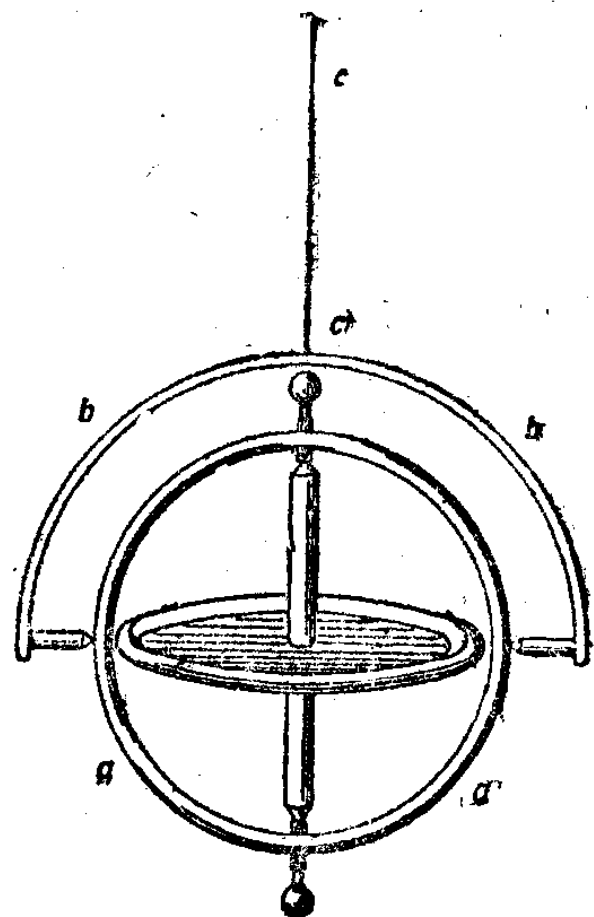


Рис. 92. Упрощенная форма подвеса Кардана.

волчка на кернах; иногда перпендикулярно к этому обручу припаян другой (экватор; у нас на рис. 91 и 92 не показан) параллельно ободу волчка; это сделано для того, чтобы удобно было брать волчок в руки, не задевая вращающейся части. Обыкновенно с таким волчком наблюдают псевдoreгулярную прецессию под действием момента силы тяжести, как это и изображено на рис. 91. Но можно сделать в местах пересечения меридиана с экватором небольшие углубления и вставить в них острые концы проволоочного обода  $bb$  (рис. 92), который затем повесить на нити  $cc$ . Таким образом получается упрощенная форма подвеса Кардана; это дает возможность делать опыты с волчком почти без влияния момента силы тяжести.

Мы укажем еще на одну форму демонстрационного волчка, которая представляет значительные удобства; этот тип волчка иногда называется жирокопом Фесселя (Боненбергера, Плюккера и т. д. — похожие друг на друга типы); он изображен на рис. 93. Здесь у волчка имеется только один обруч  $aa$ , который прикреплен к коромыслу  $AOC$ , коромысло может свободно качаться и свободно поворачиваться около точки подвеса  $O$ . Для уравнивания волчка на коромысле помещен передвижной груз  $B$ .

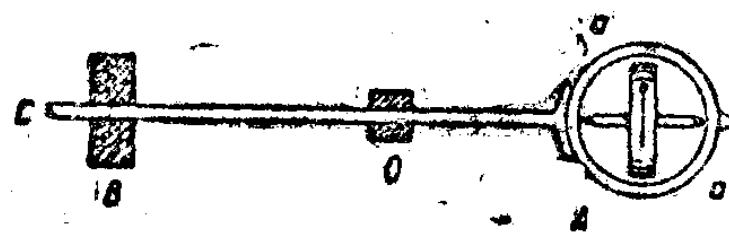


Рис. 93. Жирокоп со стержнем.



Рис. 93а. Подвес Кардана.

Желательно, чтобы точка подвеса коромысла по возможности совпадала с осью симметрии волчка, коромысла и противовеса; а для того чтобы достигнуть свободы качания коромысла, можно точку  $O$  поставить на острие или, сделав около  $O$  горизонтальную ось, вставить ее в вилку, способную вращаться в вертикальной подставке (как на рис. 93а). Вообще нужно устроить около  $O$  нечто вроде карданова подвеса, но не с тремя, а только с двумя осями. Противовес  $B$  можно передвигать вдоль коромысла в ту и другую сторону и таким образом получать моменты силы тяжести различной величины.

Подобный волчок можно устроить из велосипедного колеса, прикрепленного непосредственно на коромысле, без всякого обруча.

Сняв коромысло с подставки, мы можем подвесить его за конец  $C$  и таким образом устроить волчок-маятник (рис. 94), движения которого представляют интерес не только в механике, но и в учении об электричестве.

Заметим, что у только что описанных волчков (Фесселя и волчка-маятника) момент инерции вокруг оси качания может быть значительно больше момента инерции вокруг оси вращения. Таким образом эти волчки относятся к типу вытянутых волчков (ср. стр. 103, 78), тогда как все раньше описанные приборы представляли собой сплюснутые волчки с наибольшим моментом инерции вокруг оси вращения.

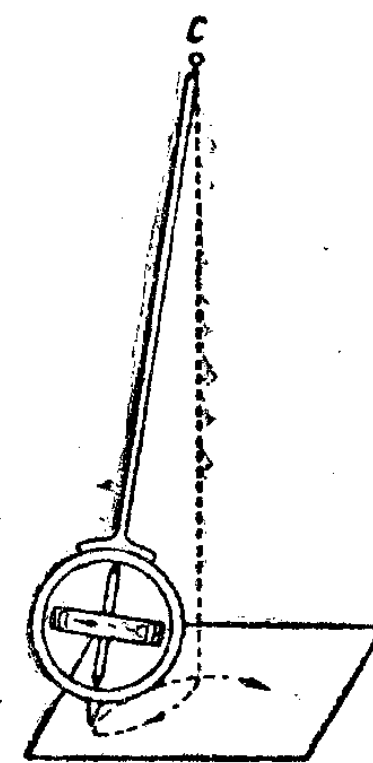


Рис. 94. Жирокоп со стержнем в виде маятника.

Ниже мы познакомимся с волчком-компасом, применяющимся в настоящее время в мореплавании. Этот волчок прикреплен к поплавку, плавающему в ругти. Такой способ подвешивания волчка (взамен подвеса Кардана) был впервые предложен лордом Кельвином (Уильямом Томсоном).

Волчки приводятся во вращение большей частью при помощи шнура, который наматывается на ось волчка и затем быстро стягивается. Намотку нужно производить аккуратно ряд к ряду, а сматывать надо, начав медленно и *постепенно ускоряя*. При соблюдении этих условий волчку можно сообщить очень большую скорость вращения (до 50 оборотов в секунду) без особых усилий и не рискуя оборвать шнур. Более тяжелый волчок можно привести во вращение, прижимая его обод к шкиву какого-либо электродвигателя. Иногда волчки устраиваются в виде турбины, приводимой в движение сжатым воздухом. Наконец, волчки-компасы сами представляют собой электродвигатель с вращающимся магнитным полем и приводятся в движение трехфазным током. При таком устройстве были достигнуты скорости почти в 500 оборотов в секунду.



Рис. 95. Реактивный момент волчка.

110. Опыты с волчком. Перед тем как начать производить опыт с волчком, полезно обозначить каким-либо образом (например краской) тот конец оси волчка, куда будет направлен его момент импульса, и пускать волчок во вращение всегда в одну и ту же сторону. Это необходимо потому, что во время самого вращения иногда бывает трудно разглядеть, в какую именно сторону волчок вернется.

Условимся называть *положительным* тот конец оси волчка, куда выходит его момент импульса  $K$ . Если направить положительный конец оси на себя (рис. 95), то вращение обода волчка будет происходить в сторону, *обратную* движению часовой стрелки; если же мы будем смотреть вдоль оси волчка, по направлению момента импульса  $K$ , то вращение волчка будет нам представляться по стрелке часов. Положительный и отрицательный концы волчка соответствуют положительному (т. е. *северному*) и отрицательному (т. е. *южному*) полюсам магнита, а направление вращения волчка соответствует направлению положительных амперовых токов в магните (ср. „Общий курс электричества“. А. А. Эйхенвальд). Вообще явления, наблюдаемые в волчке, имеют много общего с явлениями магнетизма.

Производство опытов с волчком мы начнем со следующего. Возьмем вращающийся волчок в руки так, чтобы его положительный конец лежал в правой руке, а отрицательный конец — в левой (рис. 95). Если мы будем поднимать или опускать обе руки одинаково, то волчок будет лежать у нас в руках спокойно. Если же мы более или менее быстро опустим правую руку относительно левой, другими словами, повернем ось волчка вокруг горизонтальной оси  $U$ , направленной от нас вперед (ср. рис. 95), то почувствуем, что положительный конец оси волчка стремится уйти из

правой руки *вперед*. На рис. 95 буквами  $F$  показаны активные силы, которые мы прилагаем к волчку, а буквами  $R$  — реактивные силы самого волчка. На том же рисунке обозначен и реактивный момент волчка  $M_r$ , вызванный принужденным вращением  $U$ . Этот опыт хорош тем, что он дает экспериментатору непосредственно *почувствовать* реактивные силы волчка. Однако опыт нужно производить с некоторой осторожностью, заранее приготовившись к появлению реактивного момента, иначе, в особенности при быстром вращении тяжелого волчка и при быстром его повороте, реакция может оказаться настолько сильной, что волчок вырвется из рук и при падении испортится.

Направление реактивного момента всегда легко определить заранее по правилу Фуко или по векторной формуле:

$$M = [KU].$$

Действие реактивного момента можно также наблюдать и в подвешенном волчке (рис. 92); стоит только немного закрутить нить подвеса вправо (смотря сверху) или влево, как тотчас же положительный конец волчка начинает опускаться вниз или поднимается кверху (ср. ниже: Инclinаторий Фуко).

Если волчки, изображенные на рис. 90, 92, 93, хорошо центрированы, так что на них не действует заметным образом момент силы тяжести и они сохраняют направление оси вращения неизменным, то можно сообщить этой оси (или рамке  $aa$ ) небольшой толчок рукой с моментом вокруг оси узлов  $NN$  и наблюдать получившуюся регулярную прецессию (84). В сплюснутых волчках прецессия будет обратная, а в вытянутых она будет прямая (ср. стр. 102, 78, стр. 104, 79). При сообщении толчка не нужно забывать придерживать штатив волчка другой рукой, чтобы не опрокинуть штатива; да и самый толчок (а не удар) должен быть произведен с достаточной силой, но *мягко*; при жестком ударе могут пострадать керны, в которых вращаются оси.

Чаще всего волчки служат для наблюдения псевдорегулярной прецессии (рис. 91). Для того чтобы заметить происходящие при этом нутации, нужны специальные условия (ср. пример в 91). Из формулы для частоты нутации:

$$a = \frac{Cr}{A},$$

мы видим, что нутации можно сделать заметными или при малом  $r$ , т. е. при не особенно быстром вращении волчка, или при большом  $A$ , т. е. в волчке сильно вытянутом. Так, например, если поставим слабо вращающийся волчок вертикально на подставку (рис. 91), то в первые моменты вращения можем уловить нутации, т. е. движение оси волчка по кривым, изображенным на рис. 80 (стр. 140, 105); но затем волчок, обладая слабым вращением, будет наклоняться и падать. Гораздо удобнее наблюдать нутации на волчке Фесселя (рис. 93), где можно достичь очень больших амплитуд и весьма медленных нутаций. Наконец, кривые, изображенные на рис. 81 (стр. 140, 105), легко реализовать при помощи волчки-

маятника (рис. 94). Что касается рис. 82 (стр. 140, 105), то он представляет собой случай регулярной прецессии после толчка, сообщенного оси *свободного* волчка. Об этом опыте мы уже упоминали выше с волчками 89, 90, 92, 93.

Возвратимся опять к волчку-маятнику (рис. 94). Пока волчок еще не вращается, маятник после толчка при вертикальном положении или после отклонения без толчка может совершать обычные колебания в *вертикальной* плоскости; а если мы пустим его косо, то он будет описывать эллипсы (ч. II, стр. 181, 117). Мы можем сообщить маятнику такой боковой толчок, что он будет затем двигаться равномерно по *горизонтальному кругу* (мы можем назвать это движение регулярной прецессией без нутаций, ч. II, стр. 178, 116). Если же мы пустим маятник с большого отклонения от вертикали и немного косо, то он будет совершать движения, похожие на эллиптические, но оси эллипсов не останутся неподвижными в пространстве, а будут понемногу поворачиваться (это движение мы можем назвать нутацией с прецессией. Ср. ч. II, стр. 180, 116, рис. 83).

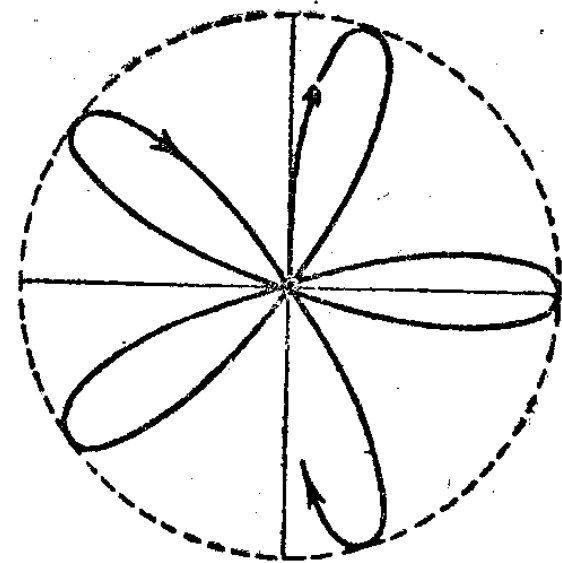


Рис. 96. Различные типы движений волчка маятника.

Теперь сообщим волчку быстрое вращение и повесим маятник вертикально. После небольшого толчка маятник уже не будет совершать обычные колебания в *вертикальной* плоскости, а начнет описывать кривые в виде так называемых розеток (рис. 96). Как видим, все ветви розетки проходят через вертикаль точки подвеса маятника. Это произошло от выбранных нами начальных условий, а именно — толчок в положении равновесия маятника. Если мы вместо этого отклоним маятник от вертикали и затем предоставим его действию момента силы тяжести, без какого-либо начального толчка, то маятник уже при первом спуске свернет в сторону

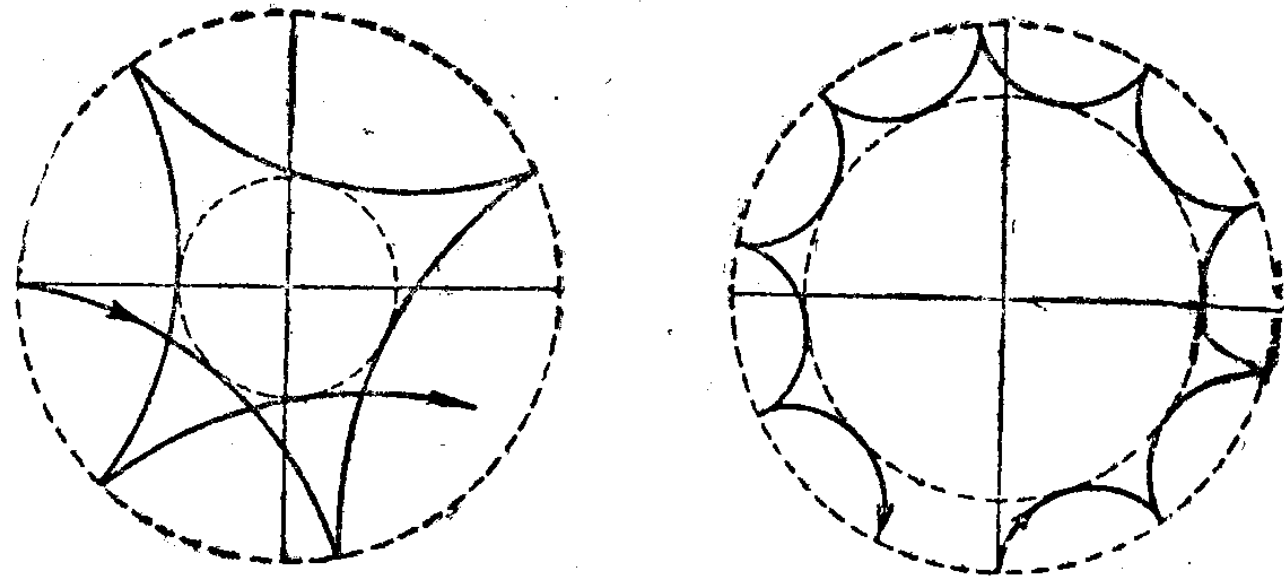


Рис. 97, 98. Различные типы движений волчка маятника.

и не пройдет через вертикаль точки подвеса. Таким образом обнаружился реактивный момент вращающегося волчка. При дальнейшем движении маятник не будет описывать розетки, а будет описывать циклоиды (рис. 97). Чем быстрее вращается волчок, тем мельче будут эти циклоиды (рис. 98);

две крайних окружности, в пределах между которыми происходит это циклоидальное движение, будут тем ближе друг к другу. Это есть не что иное, как нутация с прецессией. Наконец, при очень быстром вращении волчка его нутации могут сделаться настолько мелкими, что их совсем не будет видно, и маятник будет двигаться по горизонтальному кругу, совершая псевдoreгулярную прецессию. Для псевдoreгулярной прецессии никакого горизонтального толчка сообщать маятнику не требуется. При начальном боковом толчке мы на место циклоиды получим кривые вроде изображенных на рис. 75 и 77 в 90. Сказанного мы считаем достаточным; дальнейшие опыты читатель может произвести по собственной инициативе.

111. Закругления и выбоины пути. Мы уже рассматривали влияние закруглений и выбоин пути на движущийся поезд (ч. II, стр. 185, 119), но имели в виду только появление *центробежной силы*; теперь мы можем к этому добавить *реактивные моменты* вращающихся колес. При больших скоростях движения эти реакции могут оказаться ощутительными.

Рис. 99 представляет пару колес (паровоза или вагона), движущихся по кривой в направлении, указанном стрелкой. Если обозначить момент инерции пары колес через  $C$ , их радиус через  $a$ , скорость движения и угловую скорость вращения колес через  $v$  и  $\omega$ , то момент импульса этих колес

$$K = C\omega = C\frac{v}{a}.$$

Вектор  $K$  имеет на рис. 99 направление *наружу* кривой, а поворот оси и колес происходит вокруг оси, направленной от нас к чертежу; следовательно, результирующий момент реакции

$$M_r = [Kv]$$

будет лежать в горизонтальной плоскости (чертежа) и иметь направление, обратное направлению движения (паровоза, вагона). Этот момент реакции будет *прижимать наружное* колесо к рельсу. При движении поезда в противоположную сторону и величина  $K$  и величина  $v$  переменят свой знак, а произведение их останется того же знака. Это означает, что в какую бы сторону ни двигался поезд по кривой, момент реакции его колес будет всегда прижимать наружное колесо к наружному рельсу. Нетрудно видеть, что реактивный момент вращающихся колес действует в ту же сторону, что и момент центробежной силы (ср. рис. 84, ч. II, стр. 185, 119). Оба эти момента пропорциональны *квадрату скорости* движения поезда. Действительно, если мы обозначим через  $b$  радиус

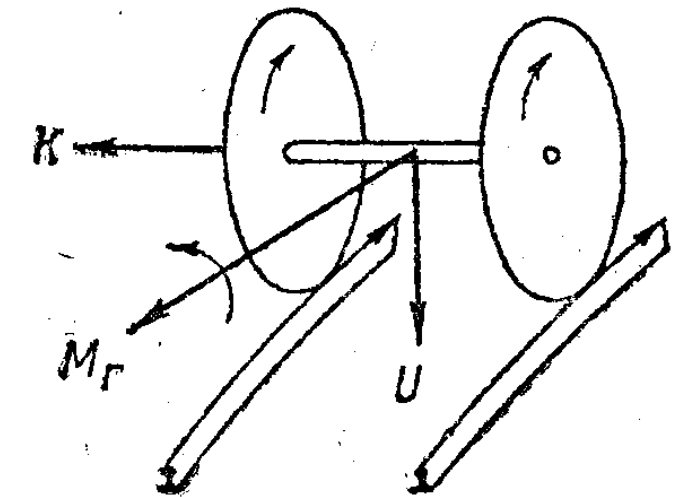


Рис. 99. Реакция на закруглении пути.

закругления, то угловая скорость поворота оси колес будет равна  $\omega = \frac{v}{b}$ , а момент реакции колес будет равен:

$$M_r = C \frac{v}{ab}$$

Если путь имеет выбоину, и притом для обоих колес одинаковой величины, то ось колес, проходя такую выбоину, будет опускаться и подниматься, оставаясь параллельной своему начальному направлению; при этом никакого реактивного момента получиться не может. Но если

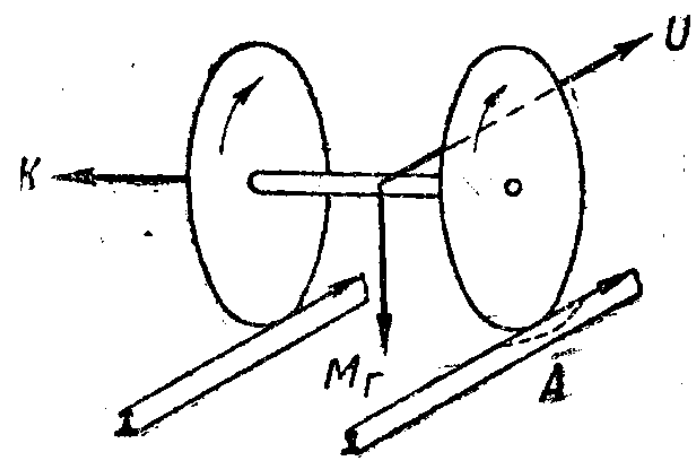


Рис. 100. Реакция на выбоине.

выбоины обоих рельсов *неодинаковы*, то получается поворот оси вокруг долевой горизонтальной линии (рис. 100), следствием чего появляется реактивный момент вокруг вертикальной оси. Такие повороты колес иногда называются *виляньем*.

Обыкновенно на закруглениях пути наружному рельсу придают некоторый подъем (ч. II, стр. 185, рис. 84). При начале этого подъема, когда поезд переходит с прямой на кривую (или обратно), возникает реактивный момент, про-

изводящий виляние. Поэтому при больших скоростях движения необходимо делать подъем наружного рельса по возможности постепенным.

112. Вращающиеся механизмы на кораблях и самолетах. Строго говоря, каждый быстро вращающийся двигатель или механизм, находящийся на Земле, должен оказывать реактивный момент, так как он принужден поворачиваться вместе с Землей. Однако угловая скорость вращения Земли настолько мала, что эти реактивные моменты даже в быстро вращающихся двигателях (как, например, турбины Лаваля) ничтожны; их можно обнаружить только чувствительными научными приборами (см. ниже: *волчок-компас*).

Двигатели, установленные на кораблях, могут оказать значительные реактивные моменты и при качке корабля и при переменах курса. Особенно ощутительно это явление на самолетах, а потому полезно его разобрать

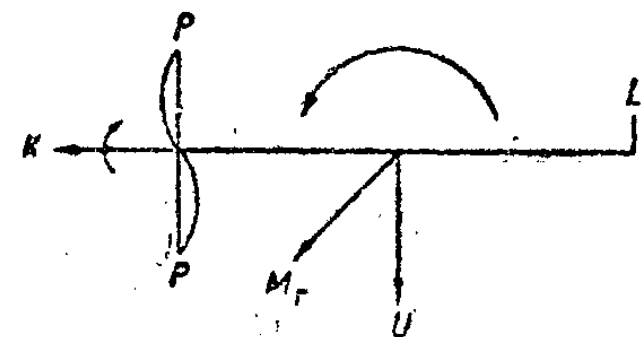


Рис. 101. Реакция при повороте самолета направо.

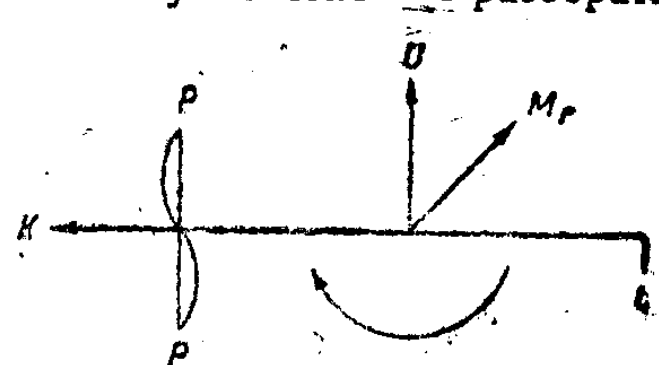


Рис. 102. Реакция при повороте самолета налево.

подробнее. На рис. 101 схематически изображена ось самолета с пропеллером *PP*. Предположим, что пропеллер вращается *по стрелке часов* (вправо), если смотреть со стороны летчика и, следовательно, его момент

импульса *K* направлен в сторону движения. При повороте направо, т. е. при принужденном вращении оси пропеллера вокруг направления *U*, мы должны получить реактивный момент *M<sub>r</sub>* (рис. 101), *наклоняющий перед самолета вниз*. При повороте самолета налево (рис. 102) получается момент, поднимающий перед самолета *вверх*. Это явление хорошо знакомо летчикам, и они с ним считаются при управлении самолетом.

113. Катящийся обруч. Примером применения теории волчка может служить катящийся по горизонтальной плоскости обруч (чем иногда *вабавляются дети*); теория обруча, в свою очередь, поможет нам разобраться в некоторых явлениях, происходящих при езде на велосипеде. Итак, представим себе обруч (рис. 103)

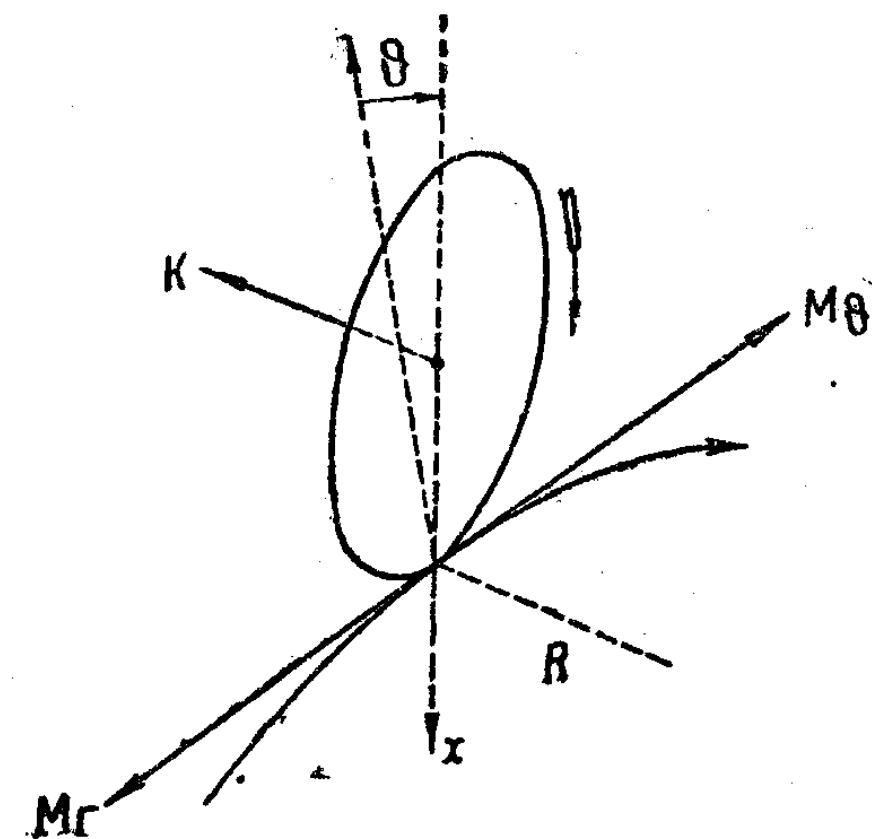


Рис. 103. Качение обруча.

радиуса *a*, катящийся по горизонтальной плоскости, и предположим, что обруч был пущен вначале так, что его плоскость была вертикальна, а затем от случайных причин (неровности пути и т. п.) плоскость обруча наклонилась на некоторый угол  $\vartheta$  относительно вертикали и повернулась вокруг оси, проходящей через точку касания обруча с плоскостью, на некоторый угол  $\chi$ ; эту последнюю ось мы можем при расчетах считать вертикальной, так как отклонения  $\vartheta$  мы будем предполагать малыми. Далее угловую скорость вращения обруча вокруг его оси симметрии мы будем считать *большой* по сравнению с угловыми скоростями  $\vartheta$  и  $\chi$ , а потому можем применить к этому случаю упрощенные уравнения движения (стр. 128, 96. Ср. также стр. 118, 89):

$$M_\vartheta = A \ddot{\vartheta} + Cr \cdot \dot{\chi}$$

$$M_\chi = B \ddot{\chi} - Cr \cdot \dot{\vartheta}$$

В этих уравнениях *C* означает момент инерции обруча вокруг его оси вращения; мы можем положить эту величину равной массе обруча *m*, умноженной на квадрат радиуса *a* (приблизительно):

$$C = ma^2.$$

Далее, *B* есть момент инерции обруча вокруг оси углов  $\chi$ , т. е. вокруг диаметра обруча. Для этой величины мы возьмем формулу, выведенную нами для полого цилиндра (глава XI):

$$B = \frac{1}{2} ma^2 = \frac{1}{2} C,$$

Наконец,  $A$  есть момент инерции вокруг оси углов  $\vartheta$ , т. е. вокруг оси, проходящей через точку касания обруча с горизонтальной плоскостью и направленной вдоль пути качения. Эта величина определяется по известной величине  $B$  по формуле стр. 20, 15:

$$A = B + ma^2 = \frac{3}{2}C.$$

Сперва предположим, что обруч катится без внешних влияний и только под действием силы тяжести; момент силы тяжести вокруг вертикальной оси (рис. 103) равен:

$$mg \cdot a \sin \vartheta = mga \cdot \vartheta.$$

Но если обруч будет двигаться по кривой радиуса  $R$  со скоростью  $v$ , то на него будет действовать центробежная сила  $m \frac{v^2}{R}$ , и момент этой силы, приложенной к центру обруча, вокруг горизонтальной оси, проходящей через точку касания обруча, будет равен:

$$m \frac{v^2}{R} a.$$

Оба эти момента нужно будет принять во внимание в первом уравнении движения, где встречается ускорение  $\ddot{\vartheta}$ . Перед этим заметим, однако, что поступательная скорость движения обруча  $v$  и его вращательная скорость  $r$  при чистом качении без скольжения (что мы и предполагаем) связаны уравнением:

$$v = ar.$$

Кроме того, при повороте обруча на кривой его плоскость будет поворачиваться вокруг вертикального диаметра с той же угловой скоростью  $\dot{\chi}$ , с которой поворачивается радиус кривизны пути, проведенный в точку касания; ведь плоскость колеса при качении всегда должна быть касательной к пути. Это замечание позволяет нам написать соотношения:

$$v = ar = R\dot{\chi}; \quad m \frac{v^2}{R} a = ma^2 \cdot r \cdot \dot{\chi} = Cr \cdot \dot{\chi}.$$

Если мы примем все это во внимание и положим внешние моменты сил (кроме силы тяжести) равными нулю, то получим уравнения:

$$mga\vartheta = \frac{3}{2}C\ddot{\vartheta} + 2Cr \cdot \dot{\chi};$$

$$0 = \frac{1}{2}C\dot{\chi} - Cr \cdot \vartheta.$$

Интегрируем второе уравнение в предположении, что  $\dot{\chi} = 0$  при  $\vartheta = 0$  (т. е. что обруч катился сперва по прямой):

$$\dot{\chi} = 2r \cdot \vartheta.$$

Подставляя  $\dot{\chi}$  в первое уравнение, получаем:

$$\ddot{\vartheta} = -\frac{2}{3} \left[ 4r^2 - \frac{g}{a} \right] \vartheta.$$

Подобное уравнение нам уже встречалось неоднократно, и оно означает, что качение обруча представляет собой движение устойчивое при условии, что

$$4r^2 > \frac{g}{a}.$$

Если это условие соблюдено, то обруч при небольших случайных отклонениях от вертикального положения будет совершать гармонические колебания с частотой:

$$n = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{2}{3} \left[ 4r^2 - \frac{g}{a} \right]}.$$

Возьмем для примера обруч диаметром в один метр,  $a = 50$  см и, подставив в нашу формулу  $g = 980 \frac{\text{см}}{\text{сек}^2}$ , получаем условие:

$$r > \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{a}} = 2,3; \quad v = ar = 115 \frac{\text{см}}{\text{сек}}.$$

Итак, обруч будет катиться устойчиво, если мы ему сообщим поступательную скорость не менее 1,2 метра в секунду. При меньшей скорости обруч упадет.

Одновременно с гармоническими колебаниями угла  $\vartheta$  мы на основании второго уравнения должны ожидать гармонические колебания угла  $\chi$ . Другими словами, обруч не только будет периодически отклоняться от вертикали то в ту, то в другую сторону, но в то же самое время будет поворачиваться (вилять) то вправо, то влево, и притом с тем же периодом, как и отклонение  $\vartheta$ . Периодические отклонения представляют собой не что иное, как нутацию; но при большой скорости движения (а следовательно и вращения) обруча эти нутации будут очень малы и часты, и будет казаться, что обруч движется по прямой и остается в вертикальной плоскости. Мы имеем здесь нечто аналогичное псевдорегулярной прецессии.

Заметим, что повороты обруча вправо и влево (вилянье) существенно необходимы для его устойчивого движения. Если бы мы лишили обруч возможности вилять, например тем, что пустили бы его по рельсу, то тем самым лишили бы его устойчивости.

Теоретически условие прямого рельса выразится тем, что нам нужно будет положить  $\dot{\chi} = 0$ , а в таком случае первое уравнение даст нам:

$$\ddot{\vartheta} = \frac{2}{3} \frac{mga}{C} \vartheta.$$



Правая часть этого уравнения того же знака, что и левая, и уравнение решается не тригонометрическими, а показательными функциями вида  $e^{+kt}$ . Это означает, что при небольшом, случайном отклонении от вертикали, обруч будет продолжать отклоняться в *ту же* сторону и скоро упадет: движение его неустойчиво.

Из вышенаписанных уравнений следует также, что обруч может катиться и в наклонном положении, но только не по прямой, а по окружности круга. Обозначим наклонение плоскости обруча через  $\vartheta_0$ , а радиус кривизны его пути через  $R_0$ . Положив в первом уравнении  $\dot{\vartheta} = 0$ , получаем непосредственно условие для такого качения:

$$mga \vartheta_0 = 2Cr \dot{\chi}_0 = 2C \frac{v^2}{aR_0},$$

откуда и определяется

$$R_0 = \frac{2v^2}{g \vartheta_0}.$$

К приведенным расчетам необходимо, однако, добавить, что в действительности устойчивость рассматриваемых движений нарушается под влиянием трения. Сила трения при чистом качении всегда ничтожна, и ее мы можем не принимать здесь во внимание; но при поворотах обруча появляется сила трения скольжения в точке (или вернее в небольшой площадке) касания обруча с горизонтальной плоскостью, и эта сила до некоторой степени ограничивает свободу поворота колеса  $\chi$  (действует аналогично рельсу, упомянутому выше), отчего и устойчивость движения значительно уменьшается. Если бы эта сила была пропорциональна  $\dot{\vartheta}$ , то она производила бы только затухание колебаний  $\vartheta$  и могла бы даже способствовать устойчивости обруча. Но на самом деле эта сила совсем не зависит от величин  $\dot{\vartheta}$  или  $\dot{\chi}$  и действует пропорционально давлению обруча на горизонтальную плоскость (см. ч. II, стр. 50, 35). Если бы мы захотели ввести эту силу трения в наши уравнения, то получили бы во втором уравнении еще постоянный член (ср. ч. II, стр. 54, 38) и в результате постоянное увеличение угла отклонения  $\vartheta$  все в одну и ту же сторону. Правда, при таком увеличении угла  $\vartheta$  обруч будет сворачивать все сильнее и сильнее в сторону и уменьшать радиус кривизны своего пути; тем не менее его падение по направлению к центру кривизны неизбежно. Это явление, т. е. качение обруча (или монеты) по спирали постепенно уменьшающегося радиуса кривизны нетрудно наблюдать в действительности.

**114. Управление велосипедом.** Движение велосипеда по горизонтальной плоскости вполне аналогично разобранным нами в предыдущем параграфе качению обруча. Но между обоими явлениями существуют и различия, так как велосипед имеет свои конструктивные особенности, а главное — велосипедом можно управлять и таким образом преобразовывать его неустойчивое движение в устойчивое. Мы не будем составлять уравнения движения велосипеда (читатель может их найти в литературе), а ограничимся общими замечаниями, достаточными для того, чтобы уяснить себе основные принципы, на которых основано управление велосипедом.

Прежде всего отметим отличия велосипеда от простого обруча:

1) у велосипеда два колеса, связанные рамой; 2) ось руля не вертикальна и не направлена в центр переднего колеса; 3) поворот всего велосипеда (его рамы) по кривому пути не равен повороту переднего колеса, а зависит еще от расстояния между колесами, 4) центр тяжести движущейся системы, включая сюда и самого велосипедиста, не совпадает с центром вращающейся части, а помещается гораздо выше и, кроме того, может менять свое положение во время езды и т. п.

Тем не менее движение велосипеда имеет много общего с качением обруча: 1) устойчивость велосипеда увеличивается с увеличением скорости движения (что хорошо известно всем велосипедистам); 2) устойчивости способствует, во-первых, реактивный момент вращающихся колес и, во-вторых, момент центробежной силы; 3) оба указанные момента действуют в одну и ту же сторону, а именно: *наружу* закругления пути движения (в сторону противоположную той, где находится центр кривизны пути); 4) сумма этих двух моментов, как и в случае обруча, пропорциональна угловой скорости поворота  $\dot{\chi}$ , но коэффициент пропорциональности выражается несколько сложнее и т. д.

В дальнейшем мы будем говорить о действии только одного реактивного момента вращающихся колес, а действие центробежной силы будем подразумевать; это упростит наши рассуждения и сделает их более наглядными.

Итак, представим себе, что велосипед движется довольно быстро по *прямому* пути и что по каким-либо причинам его клонит *направо*; угол  $\vartheta$  (рис. 103) увеличивается. Из рис. 103 мы легко можем увидеть, что по-

являющийся при этом реактивный момент вращающегося колеса  $[K\dot{\vartheta}]$  будет направлен *вниз*, и, следовательно, велосипед будет поворачиваться

*направо*; но при повороте направо появится новый реактивный момент  $[K\dot{\chi}]$ , который будет уменьшать угол  $\vartheta$  и, следовательно, восстанавливать велосипед в вертикальное положение. Однако мы не будем дожидаться этого *автоматического* восстановления велосипеда, а сами повернем руль *направо*, чтобы *усилить* восстанавливающий момент, и притом настолько, что угол  $\vartheta$  не только быстро уменьшится, но и перейдет через нуль так, что велосипед станет немного наклоняться *налево*. Это нам необходимо для того, чтобы иметь возможность сейчас же повернуть руль *налево* и вывести велосипед снова на *прямой путь*. Одновременно с этим уничтожится и левое отклонение плоскости колеса, которое мы произвели раньше усиленным поворотом руля направо. Если мы во втором случае повернули руль влево *слишком сильно*, так что велосипед с *левого* отклонения опять перешел *на правое*, то мы можем исправить свою ошибку, повернув руль направо, но не так сильно. От искусства велосипедиста зависит более или менее быстрое, а иногда даже едва заметное восстановление велосипеда в *вертикальное положение и на прямой путь*.

Мы описали наиболее часто употребляемое управление велосипедом при помощи руля (действуя моментом сил  $M_\chi$ , который входит у нас во второе уравнение); но возможно управление велосипедом, не трогая руля, а перемещая центр тяжести своего корпуса вправо или влево (действуя моментом сил  $M_\vartheta$ , который входит у нас в первое уравнение). Так как

оба уравнения связаны друг с другом, то управление велосипедом изменением момента  $M_0$ , вполне аналогично управлению моментом  $M_x$ . Предположим действительно, что при быстрой езде по прямому пути велосипед отклонился немного вправо. Не довольствуясь автоматической регулировкой, ездок усиливает ее перемещением центра тяжести тоже вправо. Увеличение угла  $\vartheta$  вместе с моментом импульса  $K$  велосипеда образуют реактивный момент  $[K\dot{\vartheta}]$ , направленный вертикально вниз и поворачивающий велосипед направо. Этот поворот направо происходит так сильно, что новый реактивный момент  $[K\dot{\vartheta}]$  не только уничтожает правый наклон  $\vartheta$ , но даже переводит плоскость велосипеда немного налево. Перемещением центра тяжести влево ездок достигает одновременно и поворота велосипеда влево, (т. е. опять на прямой путь) и уничтожения левого наклона —  $\vartheta$ . Как и в случае управления рулем, для восстановления вертикального положения и прямого пути велосипеда двух перемещений центра тяжести вправо и влево может оказаться недостаточно (когда они или малы, или слишком сильны), и придется исправлять наклон и влиять на велосипед дальнейшими перемещениями центра тяжести; и в этом случае успех зависит от искусства велосипедиста.

Приведенные рассуждения не могут, конечно, научить кого-либо управлению велосипедом, но нам достаточно было показать, что оба способа управления — рулем и без руля — основаны на одном и том же механическом принципе.

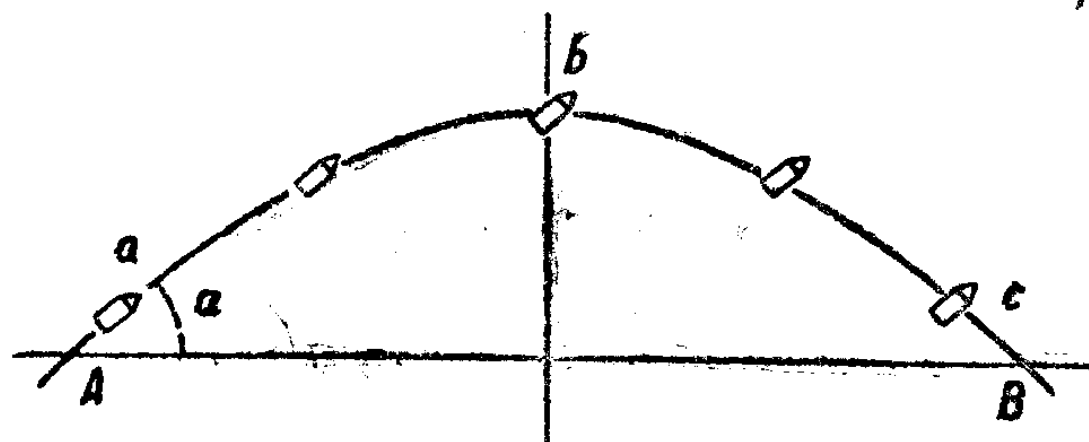


Рис. 101. Движение вращающегося снаряда, если бы не было трения воздуха.

снаряду особой винтовой нарезкой, сделанной в дуле орудия, и имеет целью обеспечить снаряду сохранение направления его оси во время движения. Но так как движение снаряда происходит по кривой (рис. 104), то ось снаряда, сохраняя свое направление в пространстве неизменным, образует с траекторией все больший и больший угол (рис. 104 a, b, c). В конце своего пути снаряд ударился бы в цель боком (рис. 104 c); а между тем желательно, чтобы он попал в цель острием. Тут оказывается полезным сопротивление воздуха. Сила сопротивления воздуха, вообще говоря, находится в очень сложной зависимости от формы снаряда и от его ориентировки относительно направления движения, но направление этой силы  $R$  проходит вне центра тяжести снаряда (рис. 105) и образует, следовательно, вокруг центра тяжести некоторый момент сил (на рис. 105 этот момент направлен от чертежа на наблюдателя). Под действием этого момента вращающийся вокруг оси  $CK_0$  снаряд совершает (псевдорегулярную) прецессию вокруг направления движе-

115. Прецессия вращающегося снаряда. Снаряд, вылетающий из орудия, имеет не только поступательное, но, кроме того, и вращательное движение вокруг своей геометрической оси  $CK_0$  (рис. 105). Вращательное движение сообщается

ния  $C\sigma$ , как это показано на рис. 105 стрелкой на пунктирной линии, понемногу ось снаряда из положения  $CK_0$  переходит в положение  $CK$ . Произвести точный расчет этого движения теоретически почти невозможно, так как явления трения в воздухе слишком сложны, а потому опытным путем подбирают соотношение между поступательной и вращательной скоростью снаряда таким образом, чтобы снаряд, совершая в пути прецессионное движение, успел повернуться и попасть в цель острием.

К тому же разряду явлений относятся различные более или менее сложные движения тел, которым при бросании в воздух было сообщено также и быстрое вращение (бумеранг, вращающиеся диски, мячи лаунтенниса и т. п.). Отскокивание от поверхности воды плоских вращающихся камешков, брошенных под

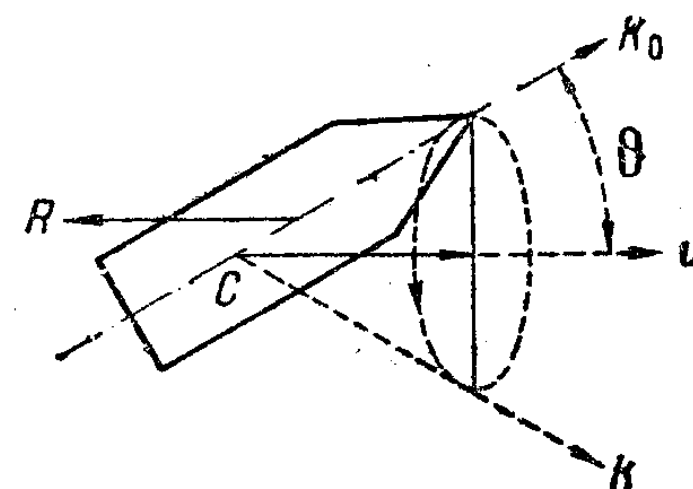


Рис. 105. Прецессия вращающегося снаряда вследствие трения о воздух.

углом к поверхности воды, тоже объясняется аналогичным образом и т. д.

116. Жироскоп Фуко. Вскоре после своего знаменитого опыта с маятником (ч. II, стр. 213, 141), доказывающего вращение земли вокруг ее оси, Фуко пришло в голову применить для той же цели волчок. Так как ось волчка при отсутствии внешних моментов сил остается неподвижной в пространстве (так же, как и плоскость качания маятника), то относи-

тельно вращающейся земли эта ось должна изменять свое направление. Самому Фуко не удалось произвести этот опыт с желаемой чистотой; тем не менее идея его была правильна, и нам необходимо разобрать ее более подробно с количественной точки зрения, потому что она легла в основу устройства современных волчков-компасов.

Представим себе, что мы находимся на поверхности Земли в некоторой точке  $P$  (рис. 106), имеющей географическую широту  $\varphi$  (географическая долгота этого места для наших рассуждений не имеет значения). В этой точке  $P$  мы поместим начало декартовых координат и проведем ось  $Ox$  по параллели на восток, ось  $Oy$  по меридиану на север и ось  $Oz$  по вертикали вверх (в зенит). Эта система координат, будучи неизменно связана с Землей (зем-

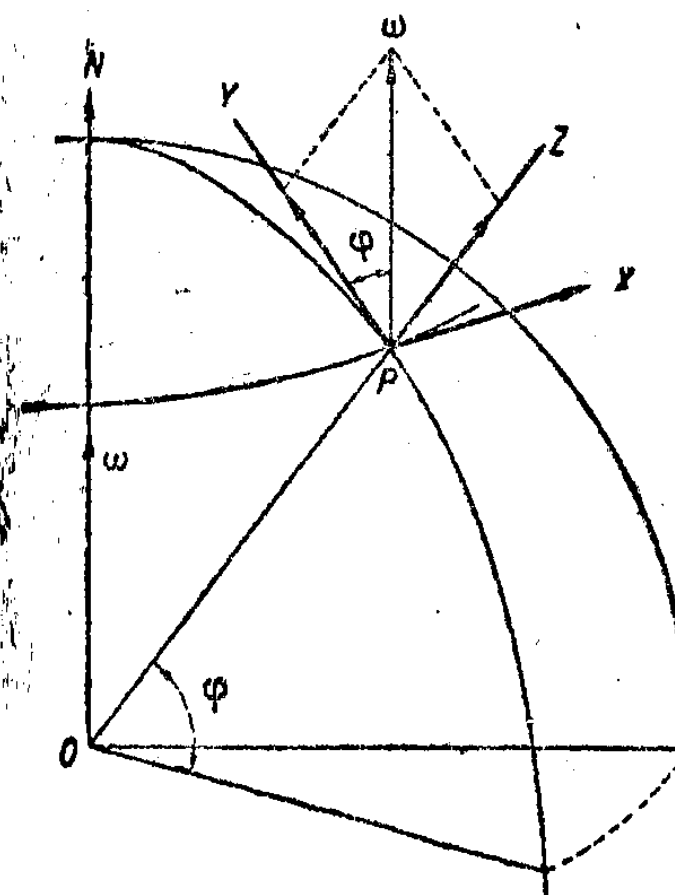


Рис. 106. Земные координаты.

ные координаты), будет следовать за вращением Земли вокруг ее оси. Движение Земли вокруг Солнца в 365 раз медленнее, и мы можем его не принимать во внимание. Установим в точке  $P$  волчок на кардиальном полюсе (стр. 151, 109), и пусть центр тяжести волчка и

точности совпадает с центром карданова подвеса. При такой установке на волчок не будет действовать момент силы тяжести, и он может продолжать вращаться без прецессии, сохраняя направление своей оси неизменным относительно неподвижного пространства. Проведем через ось волчка вертикальную плоскость (рис. 107) (плоскость, проходящую через ось волчка и направление силы тяжести в данном месте) и обозначим через  $\alpha$  угол, составляемый этой плоскостью с меридианом, и через  $\beta$  — угол, образуемый осью волчка с горизонтом. Углы  $\alpha$  будем считать от меридиана на запад, а углы  $\beta$  будем считать от горизонта вверх.

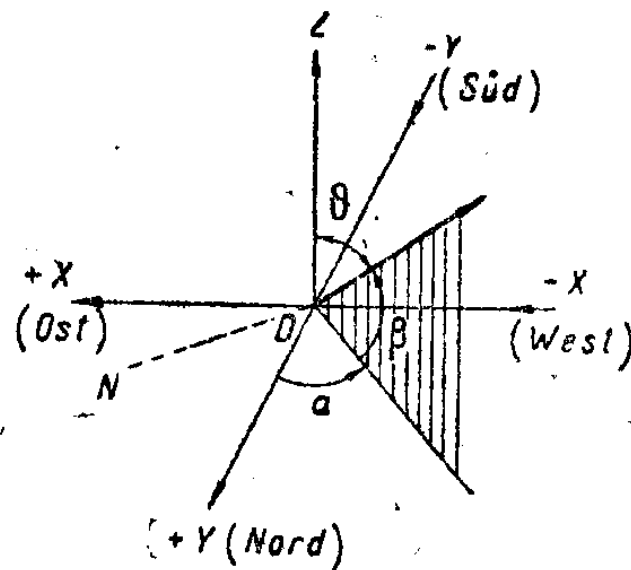


Рис. 107. Отклонение и наклонение волчка-компаса.

Если бы мы вместо волчка имели дело с магнитной стрелкой (а между ними, как увидим, большое сходство), то угол  $\alpha$  мы назвали бы западным *склонением* (или отклонением), а угол  $\beta$  назвали бы *наклонением* стрелки. Для измерения *склонения* магнитной стрелки употребляется прибор *деклинаторий*, для измерения *наклонения* употребляется *инклинаторий*.

При вращении Земли ось волчка остается в покое, а координаты вращаются. Для того чтобы узнать, как при этом будут изменяться углы  $\alpha$  и  $\beta$ , составим проекции угловой скорости вращения Земли  $\omega$  на координаты  $OZ$  и  $OY$  (проекция на ось  $OX$  равна нулю):

$$\begin{aligned} \text{проекция на ось } OZ & \text{ равна (рис. 106) } \omega \sin \varphi; \\ \text{проекция на ось } OY & \text{ равна } \dots \omega \cos \varphi. \end{aligned}$$

Первая из этих проекций дает нам непосредственно изменение угла  $\alpha$  со временем

$$-\dot{\alpha} = \omega \sin \varphi.$$

Для того чтобы определить изменение угла  $\beta$  (рис. 107) нам необходимо еще ввести множитель  $\sin \alpha$ ; тогда получаем:

$$-\dot{\beta} = \omega \cos \varphi \cdot \sin \alpha.$$

Таким образом, наблюдая углы  $\alpha$  и  $\beta$ , образуемые осью волчка с меридианом и с горизонтом, мы могли бы определить вращение Земли. Однако Фуко не удалось подтвердить это заключение на опыте по многим причинам. Прежде всего величина угловой скорости вращения Земли

$$\omega = \frac{2\pi}{24 \cdot 60 \cdot 60} = 73 \cdot 10^{-6} \text{ сек.}^{-1}$$

настолько мала, что приходится долго ждать, пока углы  $\alpha$  и  $\beta$  изменятся на заметную величину; а за это время и скорость вращения волчка успеет уменьшиться и случайные причины могут оказать влияние на положение оси волчка. Технические средства для поддержания постоянного и быстрого вращения волчка, имеющиеся у нас в настоящее время, во времена Фуко были неизвестны. Но, кроме этого, на положение оси волчка оказы-

ют влияние моменты внешних сил, между прочим, и момент силы тяжести, избежать которых почти невозможно. Уже небольшое несовпадение центра тяжести волчка с центром карданова подвеса произведет псевдо-регулярную прецессию и изменение углов  $\alpha$  и  $\beta$ , которые гораздо значительнее, чем изменения, происходящие от вращения Земли.

117. Инклинаторий и деклинаторий Фуко. Сознвая всю трудность непосредственного опыта со свободным волчком, Фуко предпринял другой опыт, в котором движение оси волчка ограничивалось одним вертикальным или одним горизонтальным направлением.

Предположим, что наружный обруч  $bb$  карданова подвеса закреплен неподвижно (рис. 90). При таком закреплении ось волчка еще может поворачиваться вокруг оси  $NN$  в вертикальной плоскости (как инклинаторий магнитной стрелки), в то время как в горизонтальной плоскости волчок должен следовать вращению Земли. По правилу Фуко (стр. 125, 94) при таком вынужденном вращении волчок должен стремиться отклониться и стать параллельно оси вынужденного вращения, т. е. поднять свой положительный конец кверху (положительным концом волчка мы называем тот его конец, куда направлен его момент импульса). Эквивалентный этому движению реактивный момент волчка определится формулой (стр. 125, 94):

$$M_{\beta} = Cr \omega \sin \varphi \cdot \cos \beta = (\text{при малом } \beta) = Cr \omega \sin \varphi.$$

Теперь предположим, что мы закрепили обруч  $aa$  (рис. 90) карданова подвеса перпендикулярно к обручу  $bb$  и даем оси волчка свободу поворачиваться, оставаясь в горизонтальной плоскости. В таком случае волчок будет участвовать во вращении Земли вокруг горизонтальной оси  $OY$ , лежащей в меридиане. Следствием этого появится реактивный момент волчка, поворачивающий ось волчка по направлению к меридиану. Волчок будет вести себя как магнитная стрелка компаса (деклинаторий). Эквивалентный реактивный момент будет равен:

$$M_{\alpha} = -Cr \omega \cos \varphi \sin \alpha = (\text{при малом } \alpha) = -Cr \omega \cos \varphi \cdot \alpha.$$

Эти опыты Фуко дали лучшие результаты, чем со свободным волчком; чтобы устранить влияние момента силы тяжести и в этом случае было почти невозможно. Поэтому в позднейших опытах, предпринятых Гильбертом, в особенности Фёпплем, момент силы тяжести не исключался, а принимался во внимание при толковании отклонений оси волчка. У Фёппля волчок представлял собой электродвигатель и висел на трех проволоках, подводивших электрический ток. Позднее Уильям Томсон (лорд Кельвин) предложил устанавливать волчок-компас на ртути, чтобы он мог свободно поворачиваться в горизонтальной плоскости. Таким путем постепенно вырабатывался принцип волчка-компаса.

118. Волчок-компас. На рис. 108 представлен схематически вертикальный разрез волчка-компаса Аншютца.

Здесь  $NS$  означает ось волчка, которая обычно устанавливается в плоскости меридиана. Сам волчок есть нечто иное, как электродвигатель трехфазного тока с вращающимся магнитным полем. Для того чтобы волчок вращался со скоростью до 500 оборотов в секунду (наибольшая достигнутая в настоящее время скорость), необходимо, чтобы частота пере-

менного тока, питающего волчок, была немного больше этого; поэтому и электрический ток для волчка должен быть взят от специальных машин, производящих переменный ток такой повышенной частоты (обычный переменный ток городских сетей имеет частоту всего в 50 периодов

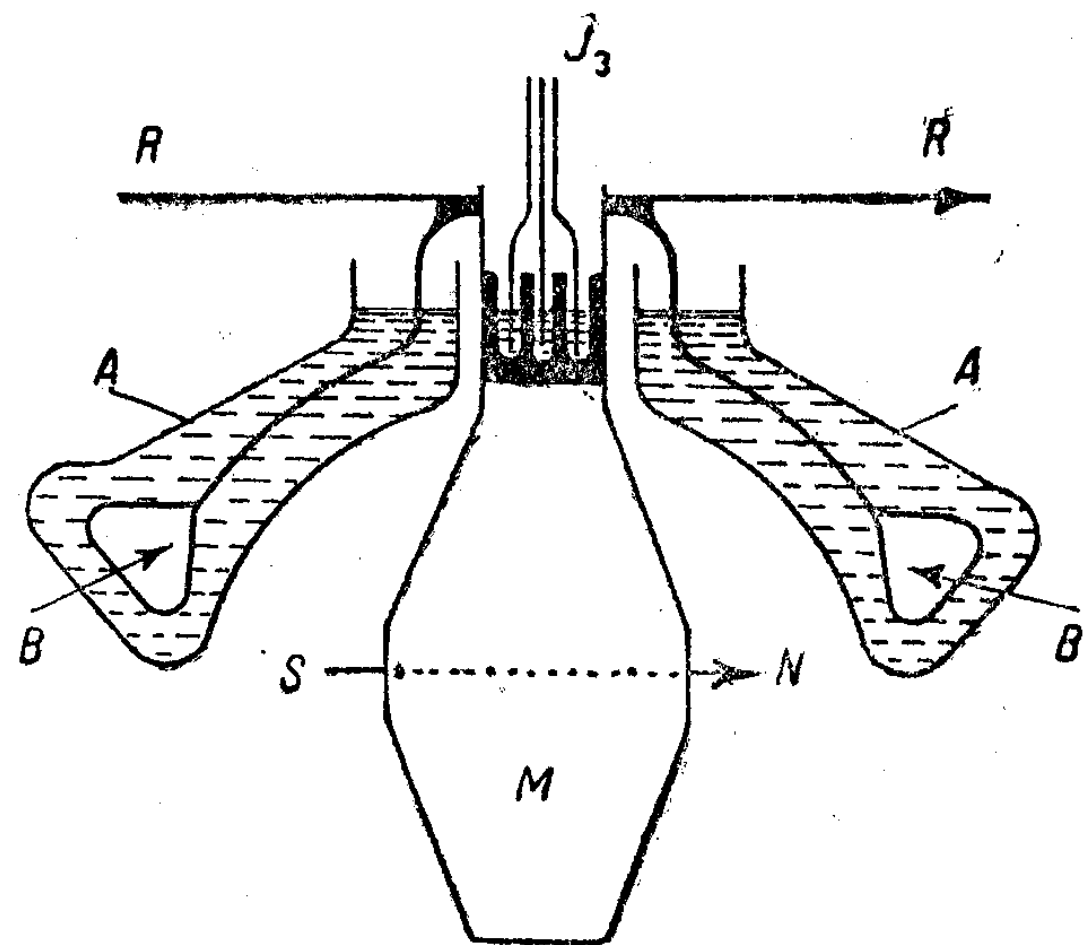


Рис. 108. Компас-волчок Аншютца.

жести волчка, его оболочки и поплавок помещается ниже опоры, и все приспособление обладает устойчивым равновесием.

К поплавку прикреплен сверху так называемая *роза* компаса *RR*, т. е. круг с делениями, которые можно наблюдать сквозь верхнее окно компаса. На розе помечено направление оси волчка, а на окне — направление оси корабля.

Электрический ток, поддерживающий вращение волчка, подводится тремя проводами *J3*, из которых один соединен со ртутью кольцеобразного сосуда (а следовательно и с поплавком и с оболочкой волчка), тогда как другие два, изолированные от первого, окунуты в чашечки со ртутью и соединены с обмоткой, вложенной в оболочку.

Из этого краткого описания мы видим, что ось волчка-компаса может свободно поворачиваться в горизонтальной плоскости (вокруг вертикальной оси), как *деклинаторий*, но в то же время поплавок может немного наклониться и ось волчка может немного подниматься и опускаться вблизи горизонтальной плоскости, как *инклинаторий*.

Для определения движения волчка-компаса мы воспользуемся уравнениями, полученными нами на стр. 128, 96, и притом в эйлеровых координатах, откинув в них средние члены с множителями  $\dot{\varphi}^2$  и  $\dot{\vartheta}\dot{\varphi}$  по их малости по сравнению с остальными членами. Мы имеем (при постоянном  $r$ ):

$$\begin{aligned} M_\vartheta &= A\ddot{\vartheta} + Cr\dot{\varphi} \cdot \sin \vartheta; \\ M_\varphi &= B\ddot{\varphi} \cdot \sin^2 \vartheta - Cr\dot{\vartheta}. \end{aligned}$$

в секунду). Так как ротор (вращающаяся часть) волчка нагревается и от электрического тока и от трения о воздух, то М. Шулер предложил заключать ротор волчка в замкнутую оболочку, наполненную водородом; трение о водород меньше, чем о воздух, и водород более теплопроводен; поэтому ротор волчка не так сильно нагревается во время вращения. Оболочка волчка прикреплена к поплавку *BB*, плавающему в кольцеобразном сосуде *AA* со ртутью. Центр тя-

Приняв во внимание, что теперь мы имеем дело с волчком, ось которого почти горизонтальна, мы должны в этих уравнениях положить (рис. 107):

$$\begin{aligned} \vartheta &= 90^\circ - \beta; & \dot{\vartheta} &= -\dot{\beta}; & \ddot{\vartheta} &= -\ddot{\beta}; \\ \sin \vartheta &= \cos \beta = 1; & \cos \vartheta &= \sin \beta = \beta; & \dot{\varphi} &= \dot{\alpha}; \end{aligned}$$

Момент внешних сил вокруг линии узлов *NN* перпендикулярной к оси *KK* будет состоять из двух частей: из момента силы тяжести

$$M_g = mgs \cdot \sin \beta = mgs \cdot \beta,$$

из реактивного момента волчка  $M_\vartheta$ , обусловленного вращением Земли. Согласно тому, что мы вычислили в предыдущем параграфе для инклинатория, мы должны положить

$$M_\vartheta = -Cr \omega \sin \varphi.$$

Момент внешних сил вокруг оси *OZ* обусловлен реактивным моментом волчка:

$$M_z = -Cr \omega \cos \varphi \cdot a.$$

Введя все это в уравнения движения и переставляя члены, получаем:

$$A\ddot{\beta} + mgs \cdot \beta - Cr \dot{\alpha} = Cr \omega \sin \varphi;$$

$$B\ddot{\alpha} + Cr \omega \cdot \cos \varphi \cdot a + Cr \dot{\beta} = 0.$$

Мы опять имеем перед собой уравнения связанных колебаний (стр. 149, 98), причем частоты собственных колебаний каждой системы в отдельности равны:

$$a_1^2 = \frac{mgs}{A}; \quad a_2^2 = \frac{Cr \omega \cos \varphi}{B},$$

коэффициент связи равен:

$$k^2 = \frac{(Cr)^2}{AB}.$$

Так как связь здесь несомненно *сильная*, то мы можем для частот результирующих колебаний применить сокращенные формулы (стр. 151, 99):

$$a' = k = \frac{Cr}{\sqrt{AB}}; \quad a'' = \frac{a_1 a_2}{k} = \sqrt{\frac{mgs \cdot \omega \cdot \cos \varphi}{Cr}}.$$

Частота  $a'$  представляет собой быстрые нутации оси волчка, которые едва заметны и нас здесь интересовать не будут. Для частоты  $a''$  мы имеем соотношение между амплитудами колебаний  $\alpha$  и  $\beta$ , формулу:

$$\frac{\alpha_0}{\beta_0} = \frac{a_2}{a_1} = \sqrt{\frac{Cr \omega \cdot \cos \varphi}{mgs}}.$$

К этому необходимо еще добавить, что уравнение для  $\beta$  содержит еще и постоянный член  $Cr \omega \sin \varphi$ , а потому угол  $\beta$  будет представлять постоянное отклонение

$$\beta_1 = \frac{Cr \omega \cdot \sin \varphi}{mgs},$$

около которого происходят гармонические колебания.

Итак, решение уравнений движения волчка-компаса мы можем теперь написать в такой форме:

$$\begin{aligned} \alpha &= a_0 \sin a''t, \\ \beta &= \beta_1 + \beta_0 \cos a''t. \end{aligned}$$

Амплитуда  $a_0$  зависит от начального толчка, между тем как постоянное отклонение  $\beta_1$  от толчка не зависит, а обусловлено вращением Земли и моментом силы тяжести. Это отклонение  $\beta_1$  можно при желании изменить соответственной нагрузкой оси волчка.

Из полученных формул мы видим, что колебания  $\alpha$  и  $\beta$  имеют одинаковую частоту, разность фаз в  $90^\circ$  и различные амплитуды. Так как направления этих отклонений  $\alpha$  и  $\beta$  перпендикулярны друг к другу, то результирующее движение конца оси волчка будет представлять собой эллипс (ч. II, стр. 133, 91). В этом эллипсе вертикальная полуось  $\beta_0$  гораздо меньше горизонтальной; кроме того, центр эллипса будет поднят над горизонтом на угловое расстояние  $\beta_1$ .

В действительности угол  $a_0$  колеблется обычно между пределами  $\pm 5^\circ$ , тогда как угол  $\beta_0$  очень мал и остается в пределах  $\pm 8'$ . Частота колебаний  $a''$  так мала, что период колебаний  $T = \frac{2\pi}{a''}$  доходит до 50 минут.

119. **Примечания к расчету волчка-компаса.** В уравнения движения волчка-компаса мы ввели реактивные моменты волчка:

$$M_\beta = -Cr \omega \cdot \sin \varphi; \quad M_\alpha = -Cr \omega \cdot \cos \varphi \cdot a.$$

При этом может возникнуть вопрос, почему явилась необходимость ввести эти моменты, когда волчок, по видимому, свободен в своих движениях, в противоположность инclinаторию и деклинаторию Фуко (стр. 167, 117). Дело в том, что основные уравнения моментов составлены в предположении, что координаты  $OXYZ$  неподвижны в пространстве, а между тем земные координаты, относительно которых мы измеряем углы  $\alpha$  и  $\beta$ , движутся вместе с Землей. Поэтому для получения правильных результатов мы должны или перейти от подвижных координат к неподвижным или ввести добавочные силы (у нас введены моменты сил). То же самое мы делаем и в других случаях; так, например, вертикальное положение отвеса определяется силой тяжести; но вследствие вращения Земли получается отклонение (ч. II, стр. 206, 136), которое мы объясняем теоретически, вводя добавочную силу, а именно: центробежную силу вращения Земли.

Для того чтобы это было еще более наглядно, мы сделаем так: в уравнениях волчка-компаса мы не будем вводить добавочные реактивные моменты, но зато перейдем от подвижных координат к неподвижным. Для этого нам достаточно заменить относительные изменения углов  $\alpha$  и  $\beta$

абсолютными их изменениями по отношению к системе координат, действующей во вращении Земли. В таком случае нам нужно к величинам  $\alpha$  и  $\beta$  прибавить изменения, обусловленные вращением Земли. Эти добавочные изменения мы уж вычисляли на стр. 164, 115. Итак, мы должны в наших уравнениях

вместо  $\dot{\alpha}$  написать...  $\dot{\alpha} + \omega \cdot \sin \varphi$ ,

вместо  $\dot{\beta}$  написать...  $\dot{\beta} + \omega \cdot \cos \varphi \cdot a$ ,

добавочные реактивные моменты откинуть. Тогда получаем:

$$A\dot{\beta} + mgs \cdot \beta - Cr (\dot{\alpha} + \omega \cdot \sin \varphi) = 0,$$

$$B\ddot{\alpha} + \dots + Cr (\dot{\beta} + \omega \cos \varphi \cdot a) = 0,$$

е. те же уравнения, что и выше.

Что касается способа решений этих уравнений, то здесь возможно упрощение. Так как отклонения  $\alpha$  и  $\beta$  невелики, а период колебаний очень велик, то ускорения  $\ddot{\beta}$  и  $\ddot{\alpha}$  будут настолько малы, что первые члены уравнения можно откинуть и ограничиться следующими:

$$Cr (\dot{\alpha} + \omega \cdot \sin \varphi) = mgs \cdot \beta,$$

$$Cr (\dot{\beta} + \omega \cdot \cos \varphi \cdot a) = 0.$$

Эти уравнения представляют собой не что иное, как частный случай применения упрощенного уравнения моментов (стр. 124, 93):

$$M = [uK].$$

Рекомендуем читателю проверить это утверждение.

Взяв производную по времени от первого уравнения и подставив в него значение  $\dot{\beta}$  из второго уравнения, получаем:

$$Cr \ddot{\alpha} = mgs \cdot \beta = -mgs \cdot \omega \cos \varphi \cdot a.$$

Отсюда определяем частоту колебаний угла  $\alpha$ , а затем из первого уравнения — постоянное отклонение и колебания угла  $\beta$ . Результаты согласуются с тем, что мы имели при более строгом расчете.

120. **Дальнейшие усовершенствования волчка-компаса.** Изложенная в предыдущих параграфах теория показывает, что волчок, действительно, может служить компасом; он имеет устойчивое положение в меридиане, при случайном толчке совершает около этого положения гармонические колебания. Большой период колебания оси волчка имеет то преимущество, что корабельная качка, период колебания которой в несколько секунд, на нее почти не влияет. Но с другой стороны большой период колебаний не позволяет быстро определить среднее положение оси, т. е. направление плоскости меридиана. По этим причинам явилась необходимость устроить добавочное приспособление для возможно быстрого затухания колебаний.

Далее, опыт показал, что хотя долевая качка корабля (вокруг оси, перпендикулярной к оси корабля) и не влияет на компас, но поперечная качка (вокруг оси корабля) может раскачивать его значительно, так как собственные колебания волчка с поплавком вокруг точки подвеса

имеют период около одной секунды. Более того, если ось корабля составляет некоторый угол с осью волчка (с меридианом места), то поперечная качка производит *односторонние* отклонения оси волчка (угол  $\alpha$ ), и тогда пригодность волчка для мореплавания является сомнительной. Это затруднение было преодолено М. Шулером, который предложил применять для компасов не один волчок, а систему из трех волчков, оси которых расположены в одной горизонтальной плоскости под углом в  $60^\circ$  друг к другу. При таком устройстве роза компаса по всем направлениям имеет период колебаний около 50 минут, и качка корабля (с периодом от 4 до 12 секунд) не оказывает на нее заметного действия. Другие конструкторы вместо двух добавочных волчков устраивают один добавочный волчок с *вертикальной* осью для достижения той же цели.

На показания волчка-компаса могут влиять и другие причины. Из полученных нами формул мы видим, что на постоянное отклонение  $\beta_0$  влияет широта места. При устройстве затухания колебаний появляется также постоянное отклонение и угла  $\alpha_0$ . Однако оба эти отклонения очень малы, и для них составлены таблицы. Далее, скорость корабля тоже может повлиять на показания компаса. Мы предлагаем читателю самому сообразить, почему при движении корабля вдоль меридиана на север ось волчка должна отклоняться на запад, тогда как при движении на юг ось волчка будет отклоняться на восток. Впрочем, и эти отклонения, как нетрудно подсчитать, незначительны и тоже могут быть приняты во внимание как поправки при отсчете показаний розы компаса.

Несмотря на все указанные влияния волчки-компасы начинают входить в практику и заменять магнитные компасы, потому что влияние железных корабельных частей и электрических установок корабля на магнитную стрелку сказывается еще значительнее.

В 1921 г. М. Шулер произвел с волчком-компасом интересный опыт определения направления географического меридиана. Наблюдая отклонения оси волчка в ту и другую сторону во время ее колебаний, Шулер определял *среднее* показание волчка; таким образом ему удалось определить положение географического меридиана с точностью до  $10''$  (угловых секунд). Весьма вероятно, что подобными же наблюдениями можно будет определить и угловую скорость вращения Земли, и притом с такой же большой точностью (величина  $\omega$  входит в уравнения движения оси волчка). Эти опыты имеют большое научное значение: благодаря им мы имеем возможность определять положение географического меридиана места и скорость вращения Земли вокруг ее оси *совершенно независимо* от астрономических наблюдений.

121. Искусственный горизонт. На кораблях и на аэропланах часто бывает необходимо иметь прибор, по которому можно было бы судить о направлении вертикальной линии или о направлении *горизонтальной плоскости* в некоторый момент времени. Обыкновенный отвес для этой цели непригоден, так как неизбежная качка превращает отвес в маятник с большими размахами. На кораблях для указанной цели служит *естественный* морской горизонт. Так, например, для определения широты места необходимо измерение высоты какой-либо звезды над горизонтом (конечно, в угловых мерах). Это делается при помощи угломерного ин-

струмента, называемого *секстантом*; визируя одновременно на горизонт и на звезду, определяют угол между этими двумя направлениями. Но горизонт часто бывает закрыт облаками или неясно очерчен, и произвести желаемые измерения оказывается невозможным. Еще в большей степени необходим горизонт на аэропланах, с которых часто совсем не видно естественного горизонта; а между тем для управления аэропланом необходимо знать в каждый момент ориентировку его крыльев относительно горизонтальной плоскости. Для всех этих целей были придуманы специальные приборы, основанные на свойстве волчка сохранять, несмотря на качку, направление оси вращения в пространстве неизменным. Первый подобный прибор был сконструирован французом Флериэ и применен к секстанту. В приборе помещен волчок с вертикальной осью, приводимый в быстрое вращение дутьем сжатого воздуха. Точка опоры волчка (острее) помещалась *немного выше* его центра тяжести (как на рис. 89), поэтому волчок и при отсутствии вращения мог висеть достаточно устойчиво, а во время вращения его устойчивость увеличивалась настолько, что даже при сильной качке волчок совершал только незначительные нутации. При помощи зеркал и линз было достигнуто, что вращающийся волчок чертил в поле зрения трубы секстанта горизонтальную линию, — это и служило *искусственным горизонтом* при измерениях. Незначительные нутации этого горизонта несколько не мешали измерениям, и результаты получались достаточно точные для практических целей.

Из приведенного краткого описания мы видим, однако, что искусственный горизонт представляет собой принципиально то же самое, что и обыкновенный отвес; в отвесе точка опоры тоже лежит выше центра тяжести, а линия, соединяющая точку опоры с центром тяжести, перпендикулярна к горизонтальной плоскости. Однако различие между этими двумя приборами и заключается именно в том, что обыкновенный отвес при качке получает *большие* размахи сравнительно *небольшого* периода качания, между тем как волчок-маятник делает только *малые* размахи, и притом сравнительно *большого* периода. При описании компаса мы уже указали, что период колебаний его может быть доведен до 50 минут. Возможность при помощи вращающегося волчка достигнуть малых колебаний большого периода, или, как говорят, возможность *стабилизировать маятник* (или отвес), вытекает непосредственно из наших уравнений стр. 167, 118 и из того, что мы сказали об углах  $\alpha$  и  $\beta$  отклонений оси волчка-компаса (ср. также § 120). Эта возможность и использована теперь для устройства искусственного горизонта.

Мы даем здесь рис. 109 и 110 одного из подобных приборов (Аншютца), употребляемого на аэропланах. На рис. 109 схематически представлен разрез прибора:  $M$  изображает оболочку, в которой помещен волчок-электродвигатель (как и в компасе на рис. 108) с вертикальной осью вращения  $O_1V$ . Эта оболочка имеет снаружи ось  $O_2O_2$ , вставленную в обруч  $bb$  (в разрезе); наконец, и обруч  $bb$  в свою очередь имеет горизонтальную ось  $O_3O_3$ . Таким образом мы имеем здесь не что иное, как подвес Кардана (рис. 90, стр. 151) с тем, однако, отличием, что ось  $O_3O_3$  проходит не через центр тяжести, а *немного выше*. К оси  $O_3O_3$  прикреплен диск  $III_0$ , нижняя половина которого закреплена и который висит на дуге  $III$  с помощью стеклышко (рис. 110). Линия  $III$  на этом

диске и представляет собой *искусственный горизонт*. Одновременно с диском летчик может видеть вставленную в прибор кольцеобразную стеклянную трубку  $G_0G_0$ , наполовину наполненную маслом. Уровень масла был бы тоже горизонтален, если бы аэроплан летел *по прямой*; но если аэроплан сворачивает на кривой, то уровень масла  $GG$  станет перпендикулярно к равнодействующей  $R$  (рис. 110) силы тяжести и центробежной силы, возникающей при движении аэроплана по кривой. Таким образом летчик может видеть на описанном приборе одновременно: направление, плоскости крыльев аэроплана  $AA$ , направление горизонтальной плоскости  $HH$ , а по разнице между направлениями  $HH$  и  $GG$  может судить о радиусе кривизны траектории аэроплана.

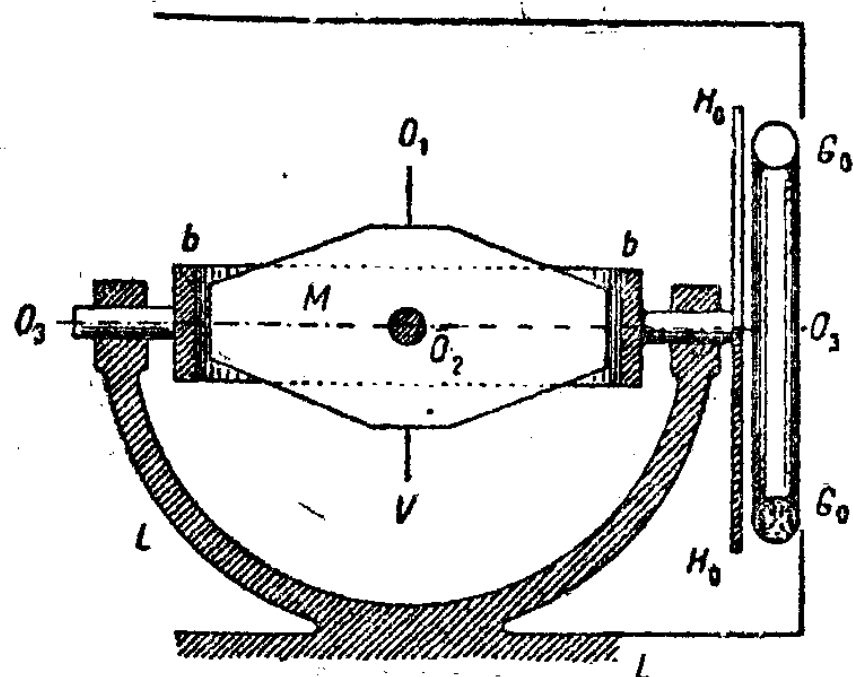


Рис. 109. Разрез волчка-горизонта.

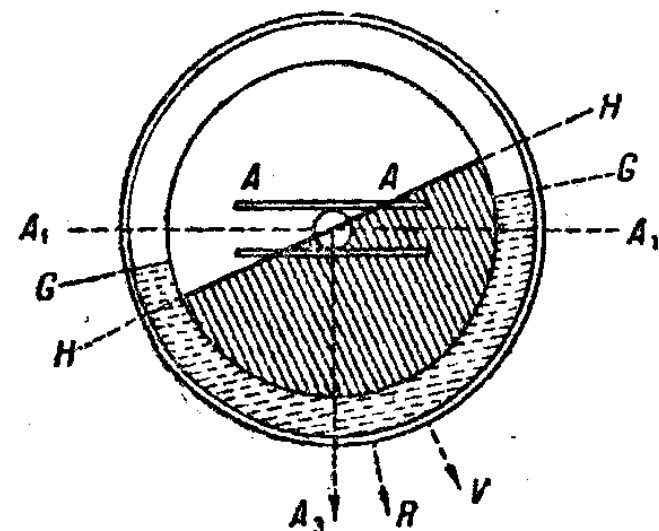


Рис. 110. Показания волчка-горизонта.

122. Прецессия и нутация Земли. Так как все небесные тела вращаются вокруг своей оси, то теория волчка имеет применение и в теоретической астрономии. Мы ограничимся здесь рассмотрением только одного примера, а именно: применим теорию волчка к объяснению *прецессии* Земли и укажем вкратце на причины нутации ее оси.

Земля находится в поле тяготения, образуемом Солнцем и Луной; влияние остальных небесных тел настолько мало, что мы можем его не принимать во внимание. Для того чтобы не рассеивать внимания, мы сперва выясним влияние Солнца, а затем уже дополним наши расчеты, приняв во внимание влияние Луны.

Расстояние между Солнцем и Землей так велико по сравнению с их размерами, что мы можем поле тяготения Солнца принять за *центральноное* (действующее обратно пропорционально квадрату расстояния между центрами Солнца и Земли). В таком центральном поле тела, не обладающие симметрией шара, испытывают не только некоторую силу тяготения, но, кроме того, и некоторый *момент сил* вокруг их центра тяжести, и мы уже определили величину этого момента (стр. 47, 38):

$$M_x = 3 \frac{km_0}{p^3} (C - B) \cdot \beta \gamma;$$

$$M_y = 3 \frac{km_0}{p^3} (A - C) \cdot \gamma \alpha;$$

$$M_z = 3 \frac{km_0}{p^3} (B - A) \cdot \alpha \beta.$$

Эти формулы отнесены к системе декартовых координат, начало которых помещено в центре тяжести тела, а оси направлены по главным осям инерции тела. Величины  $A, B, C$  означают главные моменты инерции тела вокруг этих осей;  $\alpha, \beta, \gamma$  суть *косинусы* углов, составляемых радиусом-вектором  $p$ , соединяющим рассматриваемое тело с центром тяготения  $S$  (в нашем случае Землю с Солнцем) с осями координат  $OX, OY, OZ$  (рис. 111, ср. рис. 21, стр. 146, 38). Через  $k$  обозначена постоянная тяготения, а  $m_0$  означает массу центрального тела (Солнца).

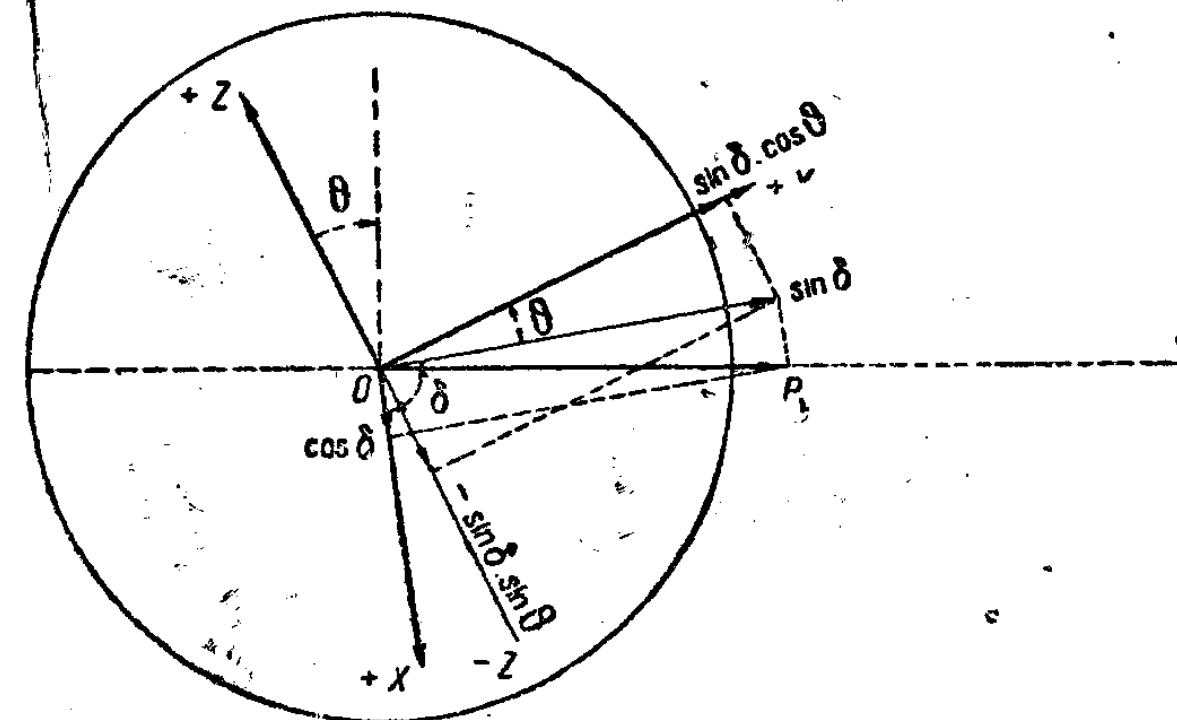


Рис. 111. Вычисление прецессии Земли.

Ось  $OZ$  мы направим по оси вращения Земли и примем, что масса земли распределена симметрично вокруг ее оси вращения; тогда мы можем положить  $B = A$ , и на основании последней формулы моментов имеем  $M_z = 0$ . Это означает, что составляющая момента сил тяготения вдоль оси вращения Земли равна нулю и что сила тяготения Земли к Солнцу не может повлиять на скорость вращения Земли вокруг ее оси.

Входящие в первые две формулы косинусы  $\alpha, \beta, \gamma$  мы выразим через угол  $\delta$ , составляемый вектором  $p$  с осью  $OX$  (рис. 111), и через угол  $\theta$ , составляемый плоскостью экватора с плоскостью эклиптики. Заметим, что ось  $OX$ , несмотря на вращение Земли, всегда направлена по одной из *главных осей* инерции Земли (потому что  $A = B$ ). Из рис. 111 следует, что

$$\begin{aligned} \cos(p_1 X) &= \alpha = \cos \delta; \\ \cos(p_1 Y) &= \beta = \sin \delta \cdot \cos \theta; \\ \cos(p_1 Z) &= \gamma = -\sin \delta \sin \theta \end{aligned}$$

(последние две формулы получаем, проектируя вектор  $p_1 \sin \delta$ , лежащий в плоскости  $SOX$ , на оси  $OY$  и  $OZ$ ).

В наши формулы входят произведения:

$$\begin{aligned} -\beta \gamma &= \sin^2 \delta \cdot \cos \theta \cdot \sin \theta = \frac{1}{2} \sin \theta \cdot \cos \theta - \frac{1}{2} \cos 2\theta \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta, \\ -\gamma \alpha &= \sin \delta \cos \delta \cdot \sin \theta. \end{aligned}$$

Угол  $\delta$  можно считать постоянным (нутаии Земли очень малы), тогда как угол  $\delta$  зависит от положения Земли на эклиптике. Во время весеннего и осеннего равноденствия  $\delta = 0$  и  $\delta = 180^\circ$  линия пересечения экватора с эклиптикой направлена к Солнцу (ср., например, рис. 20, ч. II, 54); во время зимнего и летнего солнцестояния ось  $OX$  перпендикулярна к  $p$ . Таким образом угол  $\delta$  периодически изменяется, и период его изменения равен *одному году*. Вместе с углом  $\delta$  будут изменяться и моменты  $M_x$  и  $M_y$ , и Земля должна отвечать на эти изменения нутациями своей оси. Однако эти нутации чрезвычайно малы. Гораздо большего внимания заслуживает *постоянная часть* произведения  $\beta\gamma$ , которая указывает на существование *постоянного момента*

$$M_\delta = -\frac{3}{2} \frac{km_0}{p^3} (C - A) \sin \delta \cdot \cos \delta.$$

Величина этого момента совершенно не зависит от положения Земли на ее орбите. Этот момент стремится повернуть ось Земли вокруг оси  $-OX$  и *уменьшить* угол  $\delta$  (рис. 111). Мы можем сказать, что Солнце силой тяготения стремится привести плоскость экватора к совпадению с плоскостью эклиптики.

Так как этот результат имеет значение не только для Земли, но также и для других планет и даже для самих орбит спутников, то полезно уяснить себе причину этого и помимо формул. Для этого рассмотрим какое-либо сплюснутое тело вращения (рис. 112), ось которого  $ZZ$

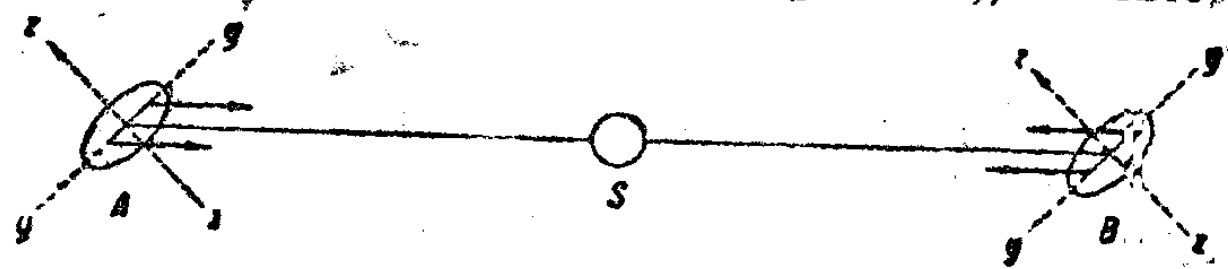


Рис. 112. Момент сил в центральном поле.

наклонена к плоскости его орбиты  $ASB$ . Находится ли тело в положении  $A$  или в положении  $B$ , во всяком случае ближайшие к Солнцу части тела будут притягиваться сильнее, чем более удаленные части; поэтому, кроме общего притяжения к Солнцу, должен получиться момент сил, стремящийся привести плоскости  $YU$  и  $AB$  к совпадению.

Совпадение плоскости экватора Земли с плоскостью эклиптики несомненно произошло бы, если бы Земля не вращалась. Но благодаря своему вращению Земля ведет себя подобно волчку и должна совершать под действием момента *псевдoreгулярную прецессию*. Если не обращать внимание на происходящие притом нутации, то можно применить к этому случаю формулу (стр. 124, 93):

$$\dot{\phi} = \frac{M_\delta}{C\omega \cdot \sin \delta},$$

в которой через  $\omega$  обозначена угловая скорость вращения Земли вокруг ее оси.

Прежде чем вычислять величину этой прецессии, определим ее направление. Написанная выше формула получается из более общей векторной формулы

$$M = [UK],$$

где  $U$  для рассматриваемого случая имеет значение прецессии  $\dot{\phi}$ , а вектор  $K$  означает момент импульса Земли, равный  $C\omega$  и направленный по  $+OZ$ . Три вектора  $M, U, K$  должны составлять *правовинтовую систему* (рис. 111). Отсюда заключаем, что вектор  $U$ , т. е. угловая скорость прецессии  $\dot{\phi}$  имеет направление на *южную* сторону эклиптики (по оси  $-OZ$  рис. 111).

Это вполне соответствует тому, что мы имели, рассматривая волчок, вращающийся на подставке и находящийся под действием момента силы тяжести. Действуя на *стоячий* волчок, момент силы тяжести стремился *увеличить* угол  $\delta$  и производил прецессию, вектор угловой скорости которой был направлен *вверх* и образовал с вектором момента импульса волчка *острый* угол. На Землю действует момент сил, стремящийся *уменьшить* угол  $\delta$  (как в волчке-маятнике стр. 138, 104), а потому в этом случае вектор угловой скорости прецессии будет образовывать с вектором момента импульса Земли (который имеет направление от южного полюса к северному) *тупой* угол.

Итак, мы приходим к заключению, что ось Земли должна описывать круговой конус вокруг нормали  $OZ$  к эклиптике (рис. 112); одновременно с этим и линия пересечения  $OX$  плоскости экватора с плоскостью эклиптики тоже должна перемещаться с той же угловой скоростью  $\dot{\phi}$ . Но мы уже указывали выше, что эта линия пересечения определяет собой положение точек весеннего и осеннего равноденствия (ср. рис. 20 части II), следовательно, и эти точки должны перемещаться по эклиптике с той же угловой скоростью и по тому же направлению. Нетрудно видеть, что перемещение точек равноденствия должно происходить в сторону, *противоположную* движению Земли на ее орбите; равноденствие должно наступать *раньше*, чем это следовало бы без прецессии. Это вполне совпадает с непосредственными астрономическими наблюдениями, почему и само это явление было названо *предварением* равноденствия.

После того, как мы убедились, что *направление* прецессии предсказывается теорией волчка правильно, перейдем к вычислению самой *величины* прецессии:

$$\dot{\phi} = \frac{3}{2} \frac{km_0}{p^3\omega} \frac{C-A}{C} \cos \delta.$$

В эту формулу мы должны подставить следующие цифровые данные:

Постоянная тяготения . . . . .	$k = 6,66 \cdot 10^{-8} CGS$
Масса Солнца . . . . .	$m_0 = 2 \cdot 10^{33} z$
Расстояние Земли от Солнца . . . . .	$p = 1,5 \cdot 10^{13} см$
Угловая скорость вращения Земли . . . . .	$\omega = 73 \cdot 10^{-6} сек.^{-1}$
Наклонение плоскости экватора к плоскости эклиптики . . . . .	$\delta = 23^\circ 27'; \cos \delta \approx 0,92$



Что касается моментов инерции Земли  $C$  и  $A$ , то для предварительного подсчета мы можем принять Землю за однородный эллипсоид вращения, для которого (см. гл. XI, 148):

$$\frac{C-A}{C} = \frac{a^2 - c^2}{2a^2},$$

где  $a$  означает радиус экватора, а  $c$  — полуось Земли. Так как разница между величинами  $a$  и  $c$  сравнительно мала, то мы можем принять:

$$\frac{C-A}{C} = \frac{a+c}{2a} \cdot \frac{a-c}{a} = \frac{a-c}{a} = \frac{1}{297,5}.$$

Справа поставлено численное значение *сплюснутости* Земли, как оно определено непосредственными геодезическими измерениями.

Подставив эти данные в формулу прецессии, получаем:

$$\dot{\psi} = \frac{3}{2} \frac{6,66 \cdot 10^{-8} \cdot 2 \cdot 10^{33} \cdot 0,92}{3,4 \cdot 10^{39} \cdot 73 \cdot 10^{-6} \cdot 297,5} = 0,25 \cdot 10^{-11} \cdot \text{сек.}^{-1}.$$

Между тем, на самом деле предварение равноденствия имеет угловую скорость

$$\dot{\psi} = 0,78 \cdot 10^{-11} \cdot \text{сек.}^{-1},$$

т. е. почти в *три* раза большую. Такое расхождение нашей теории с астрономическими наблюдениями произошло оттого, что мы еще не приняли во внимание влияние Луны.

Если мы сопоставим величины  $m$  и  $p$  для Солнца и Луны:

Масса  $m_0$  . . . . . Солнца  $2 \cdot 10^{33}$  г; масса Луны  $7,5 \cdot 10^{28}$  г  
Расстояние  $p$  Земли от Солнца  $1,5 \cdot 10^{13}$  см; — от Луны  $3,8 \cdot 10^{10}$  см,

то найдем, что множитель  $\frac{m_0}{p^3}$ , входящий в формулу прецессии, для момента сил, обусловленных Луной, *вдвое больше*, чем для момента, обусловленного Солнцем. Таким образом, чтобы принять во внимание действие Солнца и Луны вместе, нам нужно наш результат умножить на 3. Тогда теория подойдет уже близко к наблюдениям.

На самом деле годовая прецессия равна  $50''$  (угловым секундам), из которых  $16''$  мы должны приписать влиянию Солнца и  $34''$  — влиянию Луны.

Впрочем, наш расчет имел значение только первого приближения; мы принимали Землю за *однородный* эллипсоид вращения, что далеко не соответствует действительности. Так как распределение масс внутри Земли с точностью неизвестно, то было бы рациональнее произвести расчет в обратном порядке, считая величины  $A$  и  $C$  неизвестными, а величину  $\dot{\psi}$  взять из наблюдений. При таком расчете мы получили бы:

$$\frac{C-A}{C} = \frac{1}{305}.$$

Как видим, эта величина лишь немного отличается от принятой нами  $\frac{1}{297,5}$  и следовательно, *главная* причина предварения равноденствий нами определена правильно. Более подробные исследования этого вопроса читатель найдет в специальных сочинениях.

Само собой разумеется, что определенная нами *псевдорегулярная* прецессия Земли должна сопровождаться *нutationами*, амплитуду которых мы можем определить по формуле (стр. 117, 88):

$$\nu_0 = \frac{M_0 \cdot A}{(C\omega)^2} = \frac{\sin \delta}{\omega} \cdot \frac{A}{C} \dot{\psi}$$

При этом расчете мы можем положить  $A=C$  и получим *угловое* значение колебания земной оси, равное  $0,5 \cdot 10^{-7}$ , что соответствует на поверхности Земли расстоянию всего в  $27$  см. На самом же деле были обнаружены колебания оси Земли в несколько метров; но эти колебания имеют совсем иную причину (деформации земного шара и т. п.), и мы на них не можем здесь останавливаться.

123. Предварительные замечания. Прежде чем перейти к теоретическому исследованию качения твердого тела, мы должны сделать следующие замечания.

Действительные твердые тела не обладают абсолютной твердостью, а потому при соприкосновении двух тел оба соприкасающиеся тела немного сжимаются. Степень этого сжатия зависит от величины тех сил, которые возникают в месте соприкосновения, и от коэффициентов упругости того и другого тела. Если, например, шар лежит на плоскости, то и шар немного сжимается и плоскость вдавливается шаром (рис. 113). Вместо одной точки (геометрического) соприкосновения шара с плоскостью мы получаем небольшую площадку соприкосновения этих двух тел. Сила, действующая в месте соприкосновения, распространяется на всю эту площадку, но неравномерно: наибольшее давление (сила, приходящаяся на единицу площадки) мы имеем в центре площадки, тогда как к краям давление постепенно уменьшается. Вследствие такого неравномерно рас-

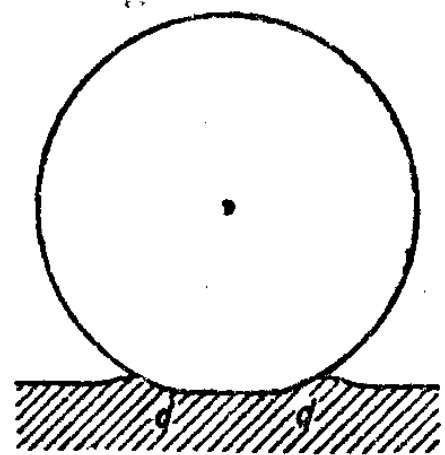


Рис. 113. Вдавливание шара в плоскость.

пределенного давления и сжатие соприкасающихся тел тоже будет неравномерным. Более того, материал плоского тела опустится в центре площадки, тогда как у краев площадки образуется выпучивание материала (рис. 113). Теперь представим себе, что этот шар катится или скользит по поверхности плоского тела. Ясно, что при перемене относительного положения тел вдавливание и выпучивание материала тел будет изменяться и движение тел будет сопровождаться целым рядом разнообразных сил (силы упругости обоих тел, силы трения между телами и т. д.). Однако расчет всех этих сил представил бы значительные затруднения, и во всяком случае это выходило бы из рамок „Механики твердого тела“. Поэтому мы должны ввести здесь упрощения, стараясь в то же время насколько возможно ближе подойти к действительности.

Первое упрощение, которое мы сделаем, заключается в том, что мы будем принимать тела настолько твердыми (коэффициент упругости настолько большим), что их вдавливанием можно пренебречь и рассматривать соприкосновение тел как геометрическое. Вместо рис. 113 мы будем иметь в виду рис. 114.

Что же касается сил, возникающих при физическом соприкосновении по всей площадке  $dd$  (рис. 113), то мы будем их считать отнесенными к точке соприкосновения  $d$  (рис. 114). Силы эти будут следующие.

1) Сила трения, сопротивляющаяся движению или скольжению

(ср. ч. II, стр. 50, 35) одного тела по другому. В эту силу мы включаем и силы упругости (вдавливания, выпучивания) и поверхностные силы. На основании многочисленных опытов можно принять результирующую всех этих сил пропорциональной нормальному давлению  $N$  соприкасающихся тел, а направление этой результирующей принять противоположным скольжению одного тела по другому. Обозначая коэффициент пропорциональности через  $f$ , мы можем положить

$$F_1 = f \cdot N.$$

Коэффициент  $f$  будет зависеть от свойств материала и от свойств поверхности (шероховатость или гладкость) соприкасающихся тел.

Если на тело действует сила, параллельная плоскости соприкосновения, но меньшая, чем  $F_1$ , то скольжения не произойдет; тем не менее, в месте соприкосновения тел вдавливание и выпучивание изменятся, и возникнет не только вертикальная, но и горизонтально направленная реакция  $F_r$  (рис. 114). В результате мы получим пару сил с моментом

$$M = F_r \cdot a.$$

Эта пара сил, не будучи в состоянии произвести скольжение, тем не менее, может произвести качение одного тела по другому.

2) Момент сил трения, сопротивляющийся качению одного тела по другому. Возникновение этого момента ясно из рис. 113, где изображены вдавливание и выпучивание соприкасающихся поверхностей. Основываясь на опытных данных, мы можем момент и этих сил тоже принять пропорциональным нормальному давлению

$$M = kN.$$

Впрочем, необходимо заметить, что силы, сопротивляющиеся качению, большей частью настолько малы, что при наличии трения скольжения ими можно пренебречь.

3) Момент сил трения, сопротивляющийся вращению тела вокруг нормали к плоскости соприкосновения. Происхождение этого момента тоже ясно из рис. 113. Величина его тоже пропорциональна нормальному давлению. Этот момент сил не имеет значения для движения тела вдоль плоскости соприкосновения тел, но он задерживает вращение тела вокруг нормали к этой плоскости. При небольшом вдавливании тел момент этот незначителен.

124. Чистое качение. Чистым качением мы будем называть такое движение одного тела вдоль поверхности другого тела, которое не сопровождается скольжением.

Предположим, что тело  $B$  (рис. 115) неподвижно и по нему катится тело  $A$ . В некоторый небольшой промежуток времени  $dt$  тело  $A$  перейдет из положения  $A$  в соседнее положение  $A_1$ . При этом точка соприкосновения

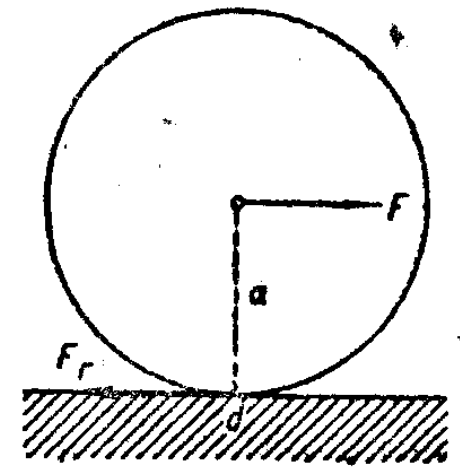


Рис. 114. Касание шара и плоскости.

ния обоих тел переместится на теле  $B$  из  $a$  в  $a_1$ , а на теле  $A$  из  $a$  в  $a_1$ . Если качение чистое, то необходимо, чтобы

$$(aa_1) = (ab) \quad ds_1 = ds_2.$$

Обозначим через  $r$  радиус кривизны дуги  $ds_2$  и через  $da$  соответствующий этой дуге центральный угол. Тогда условие чистого качения можно выразить и так:

$$ds_1 = ds_2 = r \cdot da.$$

Самый простой случай качения мы имеем при движении кругового цилиндра по неподвижной плоскости. На рис. 116 изображено сечение этого цилиндра плоскостью чертежа, перпендикулярной к той плоскости, по которой цилиндр катится; при этом круг, изображенный на рис. 116, будет катиться по линии  $AB_1$ . За некоторое время  $t$  круг перейдет из положения  $A$  в положение  $B_1$ , причем он повернется на угол  $\alpha$ . Следовательно, точка соприкосновения

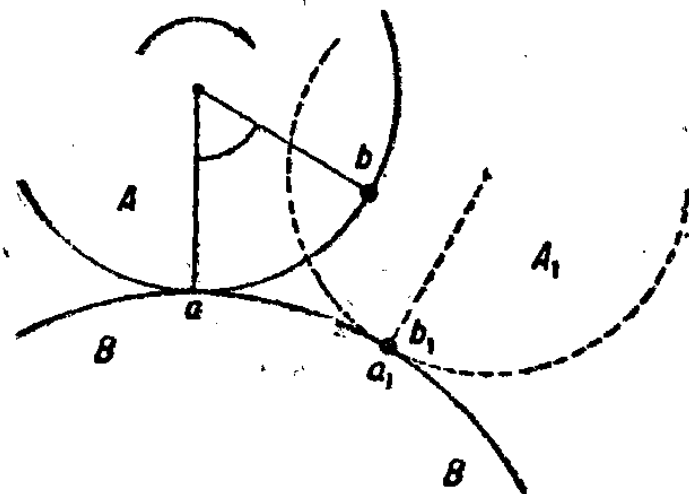


Рис. 115. Качение одного тела по другому.

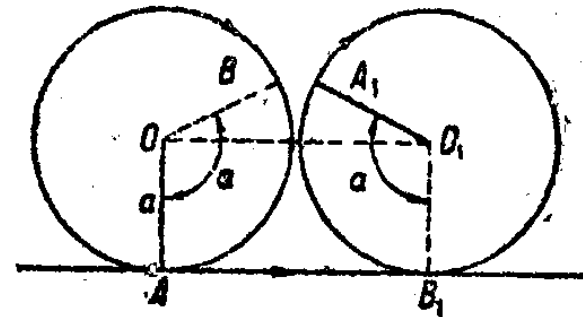


Рис. 116. Чистое качение цилиндра по плоскости.

окружности круга с плоскостью качения пройдет по этой окружности (по поверхности цилиндра) путь

$$AB = s = r \cdot \alpha.$$

При *чистом* качении величина  $s$  должна равняться передвижению точки касания по плоскости; следовательно:

$$AB = A_1B_1 = AB_1.$$

В то же самое время  $AB_1 = OO_1$  — перемещению центра круга.

Отсюда мы заключаем, что при чистом качении цилиндра по плоскости перемещение оси цилиндра  $x$  и угол поворота цилиндра  $\alpha$  связаны уравнением:

$$x = r\alpha.$$

Взяв производную по времени, получаем соотношение между скоростями; поступательная скорость оси цилиндра и его вращательная скорость связаны уравнением:

$$v = r\dot{\alpha}.$$

Это уравнение и будет представлять условие *чистого* качения цилиндра по неподвижной плоскости.

Если цилиндр не только катится, но еще и скользит *вперед*, то мы получим:

$$v > r\dot{\alpha}.$$

Напротив, если цилиндр скользит *назад*, мы получим:

$$v < r\dot{\alpha}.$$

125. Примеры чистого качения. Полезно рассмотреть несколько наиболее часто встречающихся примеров чистого качения.

1) Между плоскостями  $AA$  и  $BB$  уложены *катки* (или шарики, рис. 117). Такое приспособление употребляется при передвижении тяжелых предметов, а также в опорах мостов (одна из опор моста делается на катках для того, чтобы мост мог свободно изменять свою длину при перемене температуры). Нетрудно сообразить, что при передвижении плоскости  $AA$

относительно плоскости  $BB$  на длину  $l$  катки перекажутся на длину  $\frac{1}{2}l$  и

повернутся вокруг своей оси на угол  $\gamma = \frac{1}{2} \frac{l}{r}$ , где  $r$  означает радиус катков.

2) Ось  $A$  (на рис. 118 изображен разрез оси) устроена на шариковых подшипниках. Обозначим радиус оси через  $a$ , радиус шариков через  $r$ , а радиус внутренней неподвижной части подшипника  $BB$  через  $b$ . Предположим, что ось  $A$  повернулась на некоторый угол  $\alpha$ , и в то же время шарики повернулись на угол  $\gamma$ . Если шарики действительно катятся,

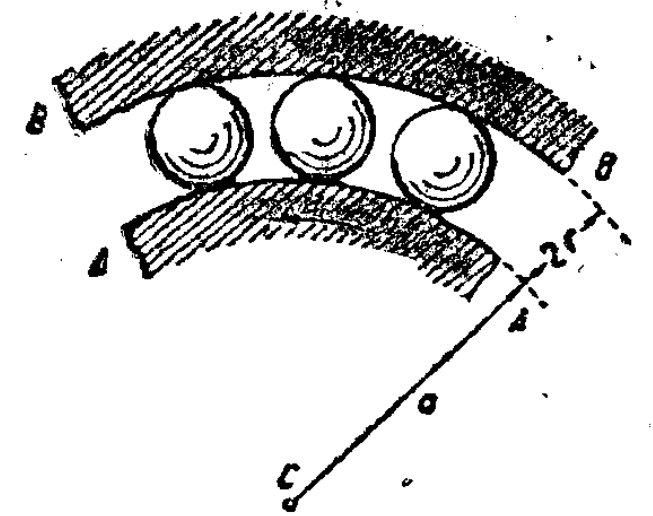


Рис. 118. Горизонтальная ось на шариковых подшипниках.

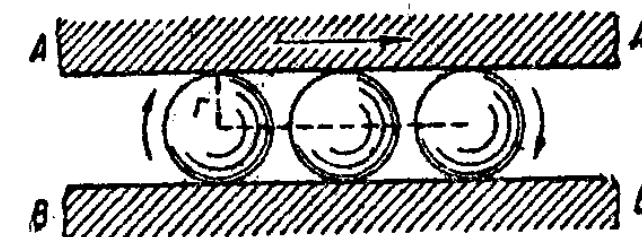


Рис. 117. Плоскости на катках или шариках.

а не скользят, то их точки касания должны пройти как по наружной поверхности оси  $A$ , так и по внутренней поверхности цилиндра  $B$  пути, т. е. *дуги окружностей*, одинаковой длины. Обозначая через  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  центральные углы, соответствующие этим дугам, можем написать:

$$r\gamma = a\alpha_1 = b\alpha_2.$$

Подставив эти величины в формулу

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 = \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) r \cdot \gamma$$

и взяв производную по времени, получаем соотношение между угловыми скоростями вращения оси и шариков:

$$\dot{\alpha} = \dot{\alpha}_1 + \dot{\alpha}_2 \\ \dot{\alpha} = \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) r \cdot \dot{\gamma}.$$

3) В предыдущем примере все угловые скорости  $\dot{\alpha}$ ,  $\dot{\alpha}_1$ ,  $\dot{\gamma}$  были параллельны друг другу (перпендикулярны к чертежу). В более общем случае эти векторы могут быть различных направлений, и в таком случае алгебраическое сложение угловых скоростей нужно заменить *векторным* сложением. Мы предлагаем читателю разобрать самому случай, изображенный на рис. 119. Здесь конец вращающейся оси сточен в виде конуса  $A$ , который своей поверхностью опирается на шарики, могущие катиться внутри желоба  $BB$ . Обозначим через  $u$  угловую скорость вращения оси машины (относительно неподвижного желоба  $BB$ ), через  $u_1$  — угловую скорость вращения шариков и через  $u_2$  — угловую скорость вращения оси относительно шариков. Требуется доказать, что

$$u = u_1 + u_2.$$

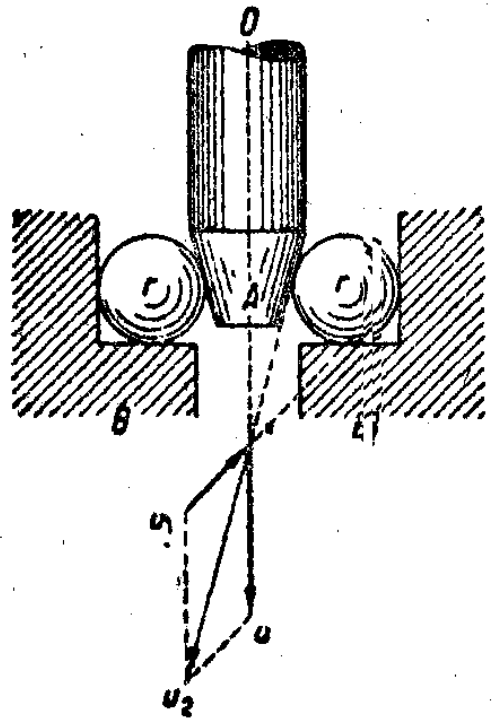


Рис. 119. Вертикальная ось на шариках.

126. Чистое качение диска по плоскости. Теперь мы рассмотрим качение диска (короткий цилиндр мы будем называть диском) по плоскости с точки зрения механики твердого тела. При качении диска по плоскости мы имеем два движения: во-первых, *поступательное* движение оси диска и, во-вторых, *вращательное* движение диска вокруг этой оси. Не нужно, однако, думать, что подобное движение обладает двумя степенями свободы; при чистом качении на это движение налагается условие (или связь; ср. ч. II, стр. 154, 101):

$$x = ra; \quad \dot{x} = v = r\dot{\alpha} = ru,$$

а каждое добавочное условие уменьшает число степеней свободы на единицу.

Следовательно, качение диска по плоскости обладает только *одной* степенью свободы.

Составим выражение для кинетической энергии диска. Обозначим через  $m$  массу диска и через  $v$  скорость его поступательного движения. Тогда кинетическая энергия поступательного движения будет равна

$$T_1 = \frac{1}{2}mv^2.$$

Обозначим через  $k$  радиус инерции диска вокруг его оси симметрии (она же ось вращения во время качения); тогда момент инерции диска будет равен  $mk^2$ , и при угловой скорости вращения  $u$  мы получим кинетическую энергию вращающегося диска:

$$T_2 = \frac{1}{2}k^2mu^2.$$

Полная кинетическая энергия диска будет равна

$$T = \frac{1}{2}m(v^2 + k^2u^2),$$

а принимая во внимание связь между угловой скоростью  $u$  и скоростью  $v$ , можем написать:

$$v = ru; \quad T = \frac{1}{2}m\left(1 + \frac{k^2}{r^2}\right)v^2.$$

Таким образом диск, катящийся по плоскости, с механической точки зрения эквивалентен телу, движущемуся поступательно (без вращения), но с несколько большей массой

$$m_1 = m\left(1 + \frac{k^2}{r^2}\right).$$

127. Чистое качение по наклонной плоскости. Полученный нами в предыдущем параграфе результат мы можем применить к качению диска по наклонной плоскости. Сила, действующая на диск, равна  $mg$  (рис. 120); составляющая этой силы, параллельная уклону плоскости, равна  $F = mg \cdot \sin \alpha$ . Следовательно, уравнение движения будет:

$$m\left(1 + \frac{k^2}{r^2}\right)\dot{v} = mg \sin \alpha.$$

Мы здесь уже приняли во внимание *увеличенную* массу диска. Это уравнение читатель может получить также из уравнения энергии:

$$\frac{dT}{dt} = F \cdot \dot{v}.$$

Полученное нами уравнение движения показывает, что диск будет скатываться по наклонной плоскости с *постоянным* ускорением  $\dot{v}$ ; а если первоначально диску была сообщена скорость вверх по плоскости, то диск будет *замедлять* свое движение, остановится на некоторой высоте и затем начнет скатываться вниз. Вообще движение диска будет происходить по тем же законам, как и движение материальной точки под действием постоянной силы тяжести (ср. ч. II, стр. 156, 103). Еще большее сходство мы получим, если вместо диска дадим катиться по наклонной плоскости шару. Катящийся по плоскости шар имеет две степени свободы, как и материальная точка. Если первоначальная скорость шара будет направлена вверх и под некоторым углом к уклону плоскости, то шар опишет на плоскости параболу и т. д.

Написанное нами уравнение применимо не только к диску, но также и к полуму цилиндру, к обручу и к шару, только величина  $k$  будет для разных случаев разная.

Для диска или однородного цилиндра мы имеем (146):

$$k^2 = \frac{r^2}{2}.$$

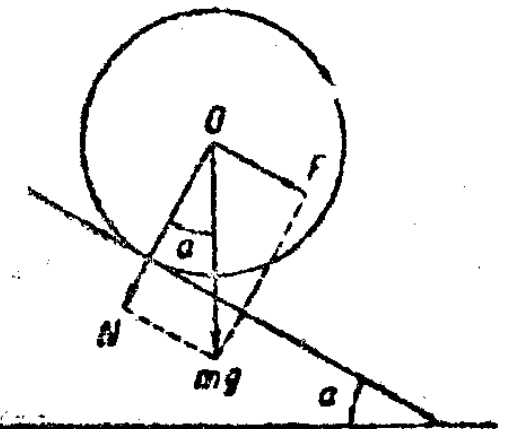


Рис. 120. Цилиндр на наклонной плоскости.

Для полого цилиндра однородного материала с радиусом  $a$  и  $a_0$  (§ 147) мы получим:

$$k^2 = \frac{a^2 + a_0^2}{2}.$$

Наконец, для однородного шара радиуса  $a$  (§ 148):

$$k^2 = \frac{2}{5} a^2.$$

Ускорение скатывания по наклонной плоскости будет обратно пропорционально величине  $\left(1 + \frac{k^2}{a^2}\right)$ ; а так как эта величина всегда больше единицы, то качение тела по наклонной плоскости всегда будет происходить *медленнее*, чем движение материальной точки при тех же условиях. Скорость, приобретаемая материальной точкой при движении по наклонной плоскости, определяется непосредственно из уравнения энергии

$$v^2 = 2gh,$$

где  $h$  — разность высот начала и конца движения. Между тем, при качении из этой энергии необходимо еще вычесть энергию вращения тела в конечной точке.

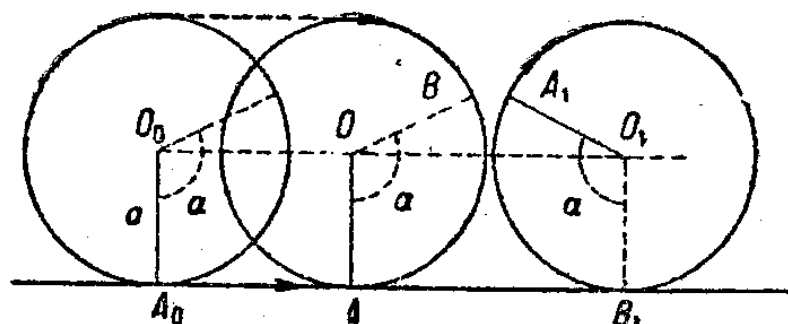


Рис. 121. Качение диска со скольжением.

### 128. Качение со скольжением.

Теперь рассмотрим несколько более общий случай, когда диск не только катится, но еще и скользит по плоскости. Для большей наглядности мы можем рассматривать переход диска (рис. 121)

из положения  $A_0$  в положение  $B_1$  как бы составленным из двух частей: из чистого скольжения  $A_0A$  без поворота диска, и из чистого качения  $AB_1$ . Для полного перемещения диска мы можем написать уравнение:

$$(O_0O_1) = (O_0O) + (OO_1);$$

$$x = x_s + ra,$$

где  $x_s$  означает путь  $A_0A$ , пройденный скольжением без поворота.

Взяв от этого уравнения производную по времени и обозначая через  $v$  скорость движения оси диска, через  $v_s$  — скорость скольжения (относительная скорость точки диска и точки плоскости, находящихся в рассматриваемый момент времени в соприкосновении) и через  $u$  — угловую скорость вращения диска, получим:

$$v = v_s + ru.$$

Случай чистого качения мы получим, если положим в этом уравнении  $v_s = 0$ .

В прежних примерах мы пренебрегали силой трения, которая при качении большей частью очень мала; мы и теперь пренебрежем трением

качения, но силою трения скольжения уже нельзя пренебрегать, потому что она значительна и от величины этой силы зависит самая форма движения. Сила трения скольжения, как мы уже указали выше, пропорциональна нормальному давлению тела на плоскость

$$F_1 = fN.$$

Если плоскость горизонтальна и на тело не действуют никакие внешние силы, кроме силы тяжести, то для катящегося тела мы должны написать первое уравнение движения (уравнение импульсов) в таком виде:

$$m\dot{v} = -fmg;$$

но, кроме того, на катящееся тело будет действовать момент силы трения вокруг центра тяжести (вокруг оси симметрии диска), и уравнение моментов даст нам:

$$k^2 m \dot{u} = M = fmg \cdot r.$$

Как видим, качение диска, сопровождаемое скольжением, имеет две степени свободы, и для его описания потребовались два уравнения; тогда как при чистом качении мы имели только одну степень свободы и уравнение импульсов слилось с уравнением моментов благодаря связи чистого качения  $v = ru$ , которой теперь уже нет.

Соответственно с этим и начальные данные у нас теперь должны быть двух родов: во-первых, начальная скорость движения центра тяжести (или оси) диска  $v_0$  и, кроме того, начальная угловая скорость вращения диска  $u_0$ . Если эти величины нам даны, то и начальная скорость скольжения диска  $v_{s0}$  определится из уравнения:

$$v_0 = v_{s0} + ru_0.$$

Уравнение импульсов и уравнение моментов дают нам для ускорений поступательного и вращательного движения диска следующие формулы:

$$\dot{v} = -fg; \quad \dot{u} = +fg \frac{r}{k^2},$$

которые при интеграции дают скорости:

$$v = v_0 - fg \cdot t;$$

$$u = u_0 + fg \frac{r}{k^2} t.$$

Скорость скольжения определяется из уравнения:

$$v_s = v - ru = v_0 - ru_0 - \left(1 + \frac{r^2}{k^2}\right) fgt = v_{s0} - \left(1 + \frac{r^2}{k^2}\right) fgt.$$

Это уравнение показывает нам, что скорость скольжения диска по плоскости со временем уменьшается, и мы можем даже определить тот момент времени  $t_1$ , когда скольжение совсем прекратится:

$$t_1 = \frac{v_0 - ru_0}{fg \left(1 + \frac{r^2}{k^2}\right)} = \frac{v_{s0}}{fg \left(1 + \frac{r^2}{k^2}\right)}.$$

Подставляя это значение  $t_1$  в уравнения для  $v$  и  $u$ , получаем для момента прекращения скольжения:

$$v_1 = v_0 - \frac{v_0 - ru_0}{1 + \frac{r^2}{k^2}};$$

$$u_1 = u_0 + \frac{v_0 - ru_0}{1 + \frac{r^2}{k^2}} \cdot \frac{r}{k^2}.$$

Нетрудно видеть, что эти величины удовлетворяют условию чистого качения; действительно, умножая последнее уравнение на  $r$ , получаем:

$$ru_1 = ru_0 + \frac{v_0 - ru_0}{1 + \frac{r^2}{k^2}} \cdot \frac{r^2}{k^2} = v_1.$$

Итак, если даже в начале движения диск брошен на плоскость с такими начальными скоростями  $v_0$  и  $u_0$ , что он начал свое движение в форме качения со скольжением, то с течением времени скорость скольжения  $v_s$  уменьшается, тогда как скорость его вращения  $u$  увеличивается. В момент  $t_1$ , определенный выше, скольжение совсем прекращается, и диск продолжает катиться дальше без всякого скольжения.

При вычислении дальнейшего движения диска мы должны положить в вышенаписанных уравнениях  $f=0$ ; тогда получим:

$$\dot{v} = 0; \quad v = v_1,$$

т. е. движение с постоянной скоростью (по инерции). Впрочем, на самом деле движение будет замедляться отчасти от сопротивления качению самой плоскости (ср. стр. 180, 123), отчасти от сопротивления воздуха. Уравнения движения для этого случая будут аналогичны уравнениям движения материальной точки (ч. II, стр. 51, 36) с тем, однако, различием, что на место действительной массы тела  $m$  нам необходимо поставить увеличенную массу  $m_1$  (стр. 185, 126), так как одновременно с поступательным движением диска происходит и его вращение.

129. Различные начальные условия. К расчету предыдущего параграфа необходимо сделать несколько дополнений.

Прежде всего величина  $t_1$  представляет собой время, наступившее после того, как диск был брошен на плоскость с данными начальными скоростями  $v_0$  и  $u_0$ . Следовательно, наше решение имеет смысл только при условии, что  $t_1 > 0$ , т. е. что скорость скольжения  $v_{s0}$  была положительна, и тогда

$$t_1 = \frac{v_{s0}}{\left(1 + \frac{r^2}{k^2}\right)fg} > 0.$$

При этом могут быть два случая.

Если при положительном  $v_0$  величина  $u_0$  тоже положительна, то для того, чтобы  $v_{s0}$  было больше нуля, необходимо, чтобы

$$v_0 > ru_0.$$

Это и есть обычное условие скольжения диска по направлению движения (вперед).

Но можно так бросить диск, что при положительном  $v_0$  величина  $u_0$  будет отрицательной:

$$u_0 = -u'_0.$$

Для этого необходимо при бросании диска сообщить ему вращение в сторону, противоположную его вращению при чистом качении (рис. 116). При таких начальных условиях величина

$$v_{s0} = v_0 + ru'_0$$

будет несомненно больше нуля, и определенное нами время прекращения скольжения будет иметь положительное значение:

$$t_1 = \frac{v_{s0}}{fg \left(1 + \frac{r^2}{k^2}\right)}.$$

Подставляем эту величину в формулы для поступательной и вращательной скоростей диска:

$$v_1 = v_0 - \frac{v_{s0}}{1 + \frac{r^2}{k^2}},$$

$$u_1 = -u'_0 + \frac{v_{s0}}{1 + \frac{r^2}{k^2}} \cdot \frac{r}{k^2}.$$

Нетрудно убедиться в том, что эти формулы удовлетворяют условию чистого качения

$$ru_1 = v_1.$$

При этом могут быть следующие три случая.

Во-первых, величина  $u_1$  может оказаться положительной; тогда и величина  $v_1$  тоже будет положительной, и диск при дальнейшем движении (при  $t > t_1$ ) будет катиться *вперед*.

Во-вторых, величина  $u_1$  может оказаться отрицательной; тогда и  $v_1$  будет отрицательной, и диск покатится *назад*.

В-третьих (правда, только в исключительных случаях), величины  $u_1$  и  $v_1$  могут аннулировать вместе со скольжением  $v_s$ . В таком случае диск, прекратив свое скольжение, *остановится*. Для того чтобы это

произошло, начальные условия  $v_0$  и  $u_0$  должны быть подобраны так, чтобы было удовлетворено условие:

$$v_0 \left(1 + \frac{r^2}{k^2}\right) = v_{s0} = v_0 + ru'_0; \\ v_0 r = k^2 \cdot u'_0.$$

130. Качение и скольжение диска вниз по наклонной плоскости. Рассмотрим опять движение диска по наклонной плоскости (стр. 185, 127), но теперь будем предполагать также возможность *скольжения* диска. На диск действует сила тяжести  $mg$ . Составляющая этой силы вдоль по уклону  $mg \sin \alpha$  (рис. 120) за вычетом силы трения

$$F_r = f \cdot N = fmg \cos \alpha$$

произведет ускорение  $\dot{v}$  центра тяжести диска. Уравнение импульсов будет:

$$mg \sin \alpha - fmg \cos \alpha = m \dot{v}.$$

Уравнение моментов вокруг центра тяжести диска напишется так:

$$fmg \cos \alpha \cdot r = mk^2 \cdot \dot{u}.$$

Для скорости и ускорения скольжения диска по плоскости мы имеем общие уравнения:

$$v_s = v - ru; \quad \dot{v}_s = \dot{v} - r\dot{u};$$

а потому для рассматриваемого случая получаем:

$$\dot{v}_s = g \left[ \sin \alpha - f \left(1 + \frac{r^2}{k^2}\right) \cos \alpha \right].$$

Разберем три типичных случая движения диска по наклонной плоскости.

Если уклон плоскости велик, а трение мало, так что

$$\sin \alpha > f \left(1 + \frac{r^2}{k^2}\right) \cos \alpha,$$

или

$$\operatorname{tg} \alpha > f \left(1 + \frac{r^2}{k^2}\right),$$

то ускорение скольжения будет иметь *положительное* значение. Это означает, что если диск был положен на плоскость без начальных скоростей, то он начнет двигаться со скольжением и скорость его скольжения будет *увеличиваться* пропорционально времени  $t$ :

$$v_s = v_{s0} + g \left[ \sin \alpha - f \left(1 + \frac{r^2}{k^2}\right) \cos \alpha \right] \cdot t.$$

Соответственные ускорения мы получим и для поступательного и для вращательного движения диска. Чистое качение наступить не может.

При меньшем уклоне плоскости, когда

$$\operatorname{tg} \alpha = f \left(1 + \frac{r^2}{k^2}\right),$$

ускорение  $\dot{v}_s = 0$ , и скорость скольжения остается постоянной равной  $v_{s0}$ . Если в начале движения диск был положен на плоскость без скольжения (при условии  $v_s = 0$ ), то и при дальнейшем движении диска скольжения не наступит, и мы получим чистое качение диска.

Наконец, если уклон плоскости настолько мал, что

$$\operatorname{tg} \alpha < f \left(1 + \frac{r^2}{k^2}\right),$$

то ускорение скольжения делается отрицательным. Это означает, что если даже первоначальная скорость скольжения была направлена *вниз* по уклону плоскости, тем не менее при дальнейшем движении скольжение будет уменьшаться, а когда оно обратится в нуль, то наступит чистое качение. Если же в начале движения скольжения не было, то и при дальнейшем движении его не будет. Вообще этот случай будет аналогичен движению диска по горизонтальной плоскости (когда  $\alpha = 0$ ).

Мы предлагаем читателю самому разобрать случай движения *вверх* по наклонной плоскости. Однако при этом надо иметь в виду, что если движение происходит *вверх* по плоскости, то сила трения скольжения (направленная всегда противоположно движению) будет одного направления с силой  $mg \sin \alpha$ , и уравнение импульса напишется таким образом:

$$mg \sin \alpha + fmg \cos \alpha = m \dot{v}.$$

Если начальная скорость  $v_0$  была направлена вверх по плоскости, то при движении она будет уменьшаться и в некоторый момент времени  $t_1$  скольжение вверх совсем прекратится и начнется качение. Во время чистого качения уравнение импульса напишется так:

$$mg \sin \alpha = m \dot{v}.$$

Если же диск остановится и начнет двигаться обратно, *вниз* по плоскости, то мы должны будем написать опять уравнение импульсов в виде

$$mg \sin \alpha - fmg \cos \alpha = m \dot{v}.$$

Мы советуем и здесь разобрать случай, когда  $u_0 < 0$  (ср. стр. 189, 129).

131. Качение шара по горизонтальной плоскости. Поместим начало координат в центр шара, оси  $OX$  и  $OY$  возьмем в горизонтальной плоскости, а ось  $OZ$  вертикально вверх (рис. 122). Обозначим скорость центра шара через  $v$  и угловую скорость вращения шара через  $u$ . Мы будем предполагать, что шар во время своего движения остается на плоскости, и можем положить  $v_z = 0$ . Тогда движение шара будет иметь (вместо шести) только пять степеней свободы со скоростями

$$v_x; v_y; v_z = 0; u_x; u_y; u_z.$$

При чистом качении шара по какому-нибудь направлению  $v$  он будет вращаться вокруг оси  $OY$  (рис. 122), *перпендикулярной* к этому

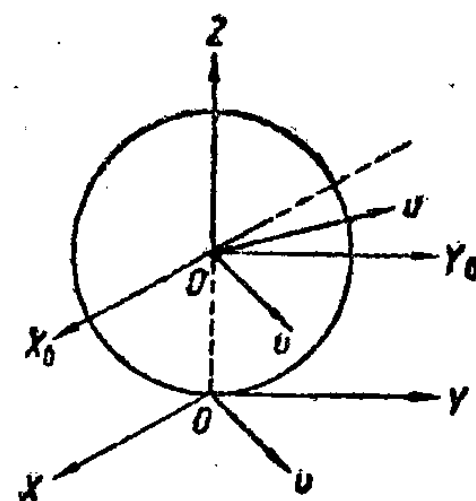


Рис. 122. Качение шара по плоскости.

направлению, и для соотношения между скоростью центра шара и вращательной скоростью шара мы можем написать векторное уравнение:

$$\mathbf{v} = [\mathbf{r}\mathbf{u}].$$

Проектируя это уравнение на оси  $OX$  и  $OY$ , получаем (при  $r_x = r_y = 0$ ):

$$v_x = -ru_y; \quad v_y = +ru_x.$$

Если качение сопровождается скольжением со скоростью  $v_s$ , то мы получим:

$$v_x = v_{sx} - ru_y; \quad v_y = v_{sy} + ru_x.$$

Такие же уравнения мы должны написать и для начала движения (при  $t = 0$ ):

$$v_{x0} = v_{sx0} - ru_{y0}; \quad v_{y0} = v_{sy0} + ru_{x0}.$$

Уравнения импульсов и уравнения моментов напишутся таким образом

$$\dot{v}_x = -fg; \quad \dot{u}_y = -fg \frac{r}{k^2};$$

$$\dot{v}_y = -fg; \quad \dot{u}_x = -fg \frac{r}{k^2};$$

$$\dot{v}_z = 0; \quad \dot{u}_z = 0.$$

При интеграции этих уравнений мы должны принять во внимание начальные условия и, кроме того, ввести условие (связь), что шар остается во все время движения в соприкосновении с плоскостью ( $v_z = 0$ ).

$$v_x = v_{0x} - fg \cdot t; \quad u_y = u_{y0} + fg \frac{r}{k^2} t;$$

$$v_y = v_{0y} - fg \cdot t; \quad u_x = u_{x0} + fg \frac{r}{k^2} t;$$

$$v_z = 0; \quad u_z = u_{z0}.$$

Мы видим, что уравнения движения распадаются на три группы, независимых друг от друга. Первая пара уравнений, относящихся к движению параллельно оси  $OX$ , и вторая пара уравнений, относящихся к движению параллельно оси  $OY$ , тождественны с уравнениями качения диска, которые мы рассматривали выше (стр. 186, 128) довольно подробно, а потому мы можем ограничиться указанием главнейших результатов наших вычислений, а именно:

Если в начале движения шар скользил по плоскости, то при дальнейшем движении скорость скольжения будет уменьшаться, дойдет до нуля, и тогда наступит *чистое* качение. При качении со скольжением скорость движения центра тяжести постепенно уменьшается, а когда наступит чистое качение, то скорость делается постоянной, и шар катится дальше по инерции (трение качения мы в наших уравнениях не принимали во внимание). Если начальная угловая скорость вращения шара

воположна той скорости, которая соответствует качению шара *вперед*, то по прекращении скольжения шар может покатиться *назад* (ср. стр. 188, 129). При определенном соотношении между начальными скоростями шар может по прекращении скольжения остановиться неподвижно, не вращаясь.

Положим, что условия движения таковы, что параллельно оси  $OX$  шар катится со скольжением, тогда как параллельно оси  $OY$  скольжение уже прекратилось или его совсем не было. В таком случае скорость центра шара параллельно оси  $OX$  будет постепенно (и равномерно) уменьшаться, тогда как параллельно оси  $OY$  скорость движения шара будет постоянна. В результате мы получим движение центра шара по параболе. Действительно, из уравнений движения

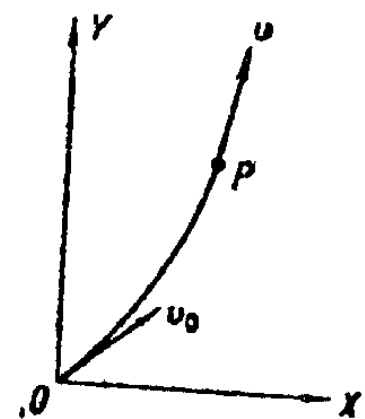


Рис. 123. Движение шара по параболе.

$$v_x = v_{0x} - fgt; \quad v_y = v_{1y};$$

$$x = v_{0x} \cdot t - \frac{1}{2} fgt^2; \quad y = v_{1y} \cdot t.$$

По исключении времени получаем уравнение параболы (рис. 123):

$$x = \frac{v_{0x}}{v_{1y}} y - \frac{1}{2} \frac{fg}{v_{1y}^2} y^2.$$

В тот момент, когда скольжение прекратится и параллельно оси  $OX$  (при  $t_2$ ) проекции скоростей  $v_{x2}$  и  $v_{y2}$  сделаются постоянными, шар покатится без скольжения с постоянной скоростью по прямой линии, направление которой может быть определено по уравнению:

$$\operatorname{tg}(v_2 X) = \frac{v_{y2}}{v_{x2}}.$$

Эта прямая будет касательна к параболе, которую описывал шар при скольжении, и притом в той ее точке  $P$  (рис. 123), где прекратилось скольжение.

Из сказанного мы видим, что при известных начальных условиях движение шара по горизонтальной плоскости может быть рассчитано во всех деталях. Нетрудно также рассчитать движение шара по наклонной плоскости, причем можно ввести в уравнения также и силу трения, сопротивляющуюся качению, а также и силу сопротивления воздуха, которую при малых скоростях можно принять пропорциональной скорости поступательного движения шара.

Нам остается еще рассмотреть последнюю пару уравнений, относящихся к оси  $OZ$ :

$$v_z = 0; \quad u_z = u_{z0}.$$

Но первое из этих уравнений указывает только на отсутствие движения центра тяжести параллельно оси  $OZ$ , тогда как второе уравнение показывает нам, что сообщенное шару вращение покрут вертикальной



оси  $OZ$  остается при всех его дальнейших движениях неизменным. Будет ли шар катиться и скользить по горизонтальной плоскости  $OXY$ , или он совсем остановится, — все равно, у шара останется еще вращение  $\omega_z$  вокруг вертикальной оси, на которое ни трение скольжения ни трение качения не оказывают никакого влияния. Однако на самом деле, как это мы уже указывали выше (стр. 180, 123), вращению вокруг оси, *нормальной* к поверхности качения, также сопротивляется трение особого рода, а потому и это вращение должно постепенно уменьшаться и, наконец, совсем прекратиться.

Все рассмотренные нами случаи качения шара по горизонтальной плоскости можно наблюдать на бильярде. Что же касается до ударов, которые необходимо сообщить бильярдному шару для получения тех или иных движений, то мы их разберем в следующей главе.

## ГЛАВА ДЕСЯТАЯ.

### ТЕОРИЯ СОУДАРЕНИЯ ТВЕРДЫХ ТЕЛ.

132. Предварительные замечания. Явления, происходящие при соударении двух тел, еще более сложны, чем явления качения. Соударяющиеся тела при соприкосновении тоже вдавливаются друг в друга (ср. стр. 180, 123), и притом очень сильно, так как силы, возникающие при соударении, обыкновенно очень велики. От того места, где произошел удар, сжатие и расширение материала тела распространяются подобно волнам по каждому из соударяющихся тел; эти волны отражаются от границ тела и дают начало упругим колебаниям, остающимся в теле и после прекращения удара. Силы взаимодействия между соударяющимися телами будут, следовательно, зависеть не только от степени их взаимного смятия, как это мы имели при исследовании явления качения (стр. 180, 123), но также и от формы и размеров самих тел, потому что от формы и от размеров тела зависит распределение волн, отраженных от границ тела. Задача, поставленная для решения в такой форме, уже выходит за рамки механики *твердого* тела и относится к теории упругости. Но к этому прибавляются еще осложнения другого характера, как-то: потеря энергии удара на нагревание, на смятие тел, на трение, на сопротивление о воздух и на распространение звука в воздухе и т. п. Не имея возможности принять все эти обстоятельства во внимание, мы должны ограничиться приближенным решением, введя в расчет такие соотношения, которые, с одной стороны, возможно близки к действительности, а с другой стороны, возможно просты, чтобы излишне не усложнять самого расчета.

При расчете явлений удара мы примем следующее.

1) Мы будем предполагать, что вдавливание соударяющихся тел настолько мало, что в момент удара *соприкосновение* между телами чисто *геометрическое*.

2) Самый процесс удара мы будем предполагать происходящим в такое короткое время  $\delta t$ , что мы будем считать удар мгновенным. Если соприкосновение соударяющихся тел началось в момент  $t_1$ , а кончилось в момент  $t_2$ , то мы можем принять:

$$t_2 - t_1 = \delta t \rightarrow 0.$$

3) Сделанное предположение о мгновенности удара влечет за собою другое предположение, а именно: что координаты соударяющихся тел за время удара не успевают измениться заметным образом. Обозначая какую-либо координату тела (линейную или угловую, или какую-либо обобщенную) через  $q$ , мы можем наше допущение выразить формулой:

$$q_2 - q_1 = \delta q \rightarrow 0.$$

4) Несмотря на сделанные нами предположения, что  $\delta t = 0$  и что  $\delta q = 0$ , мы, тем не менее, должны принять, что импульсы  $p$  и скорости  $v$  тела при ударе изменяются; в этом и заключается явление удара. Обозначим через  $F_i$  силу, действующую во время удара. Тогда на основании второго закона Ньютона мы должны написать

$$p_2 - p_1 = \int_{t_1}^{t_2} F_i \cdot dt.$$

Если разность  $(p_2 - p_1)$  имеет вследствие удара *конечное* значение, а промежуток времени  $(t_2 - t_1)$ , в течение которого действовала сила  $F_i$ , очень мал (а мы принимаем даже, что он ничтожно мал), то сила  $F_i$  должна быть *очень велика*.

5) Итак, мы примем, что силы  $F_i$ , производящие удар и мгновенное изменение импульса  $p$ , *чрезвычайно велики* по сравнению с другими силами, не производящими таких *мгновенных* изменений импульсов. Мы будем называть эти силы *мгновенными*. По сравнению с мгновенной силой удара мы можем, например, пренебречь обычной силой трения между телами, если удар не направлен нормально к поверхности соприкосновения тел. Это подтверждается, например, известным опытом с монетой, положенной на стакан, покрытый картой. Сообщив удар карте по направлению, касательному к плоскости карты, мы можем выбить карту из-под монеты, причем монета не будет приведена в горизонтальное движение, а упадет вертикально вниз, в стакан.

6) Из принятых нами допущений следует также, что потенциальная энергия тела за время удара не может измениться заметным образом (потому что координаты и вообще положение тела не изменяются заметным образом). Что же касается кинетической энергии, то она, вообще говоря, будет изменяться, потому что изменяются и импульсы  $p$  и скорости  $v$  тел. Мы встретим ниже случаи, когда кинетическая энергия частью теряется. Это нужно понимать в том смысле, что за время удара часть кинетической энергии превращается в другие виды энергии (в теплоту) и уже не проявляется в скоростях движения тел.

133. Нормальное падение шара на плоскость. Положим, что шар падает вертикально на горизонтальную плоскость с высоты  $h_1$ . В момент соприкосновения шара с плоскостью шар имел скорость

$$v_1 = \sqrt{2gh_1},$$

при этом импульс шара был направлен вниз и имел величину

$$p_1 = mv_1.$$

Кинетическая энергия шара в момент удара была равна

$$T = \frac{1}{2} mv_1^2 = mgh_1.$$

Во время удара между шаром и плоскостью действовали упругие силы, и мы можем весь процесс соударения рассматривать состоящим из двух периодов.

В первую половину этого периода плоскость оказывала реакцию движению шара, вследствие чего скорость шара, его импульс и его кинетическая энергия быстро уменьшились до нуля. Кинетическая энергия шара превратилась в потенциальную энергию упругих сил, возникших в материале плоскости и шара вблизи места соприкосновения.

В следующую затем половину периода, соприкосновения упругие силы стремятся восстановить нормальный объем материала: происходит расширение, и силы упругости отталкивают шар и плоскость друг от друга. При этом потенциальная энергия упругих сил снова превращается в кинетическую энергию шара; шар отскакивает вверх с некоторой начальной скоростью  $-v_2$  и может подняться на некоторую высоту (рис. 124)

$$h_2 = \frac{v_2^2}{2g}.$$

За время удара скорость шара изменилась на величину

$$v_1 - (-v_2) = v_1 + v_2.$$

Импульс шара изменился на величину

$$p_1 - p_2 = m(v_1 + v_2).$$

Кинетическая энергия шара изменилась на величину

$$\frac{1}{2} m(v_1^2 - v_2^2).$$

Отношение кинетической энергии, получившейся *после* удара, к кинетической энергии до удара мы обозначим через  $k^2$ :

$$k^2 = \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2 = \frac{h_2}{h_1}; \quad k = \frac{v_2}{v_1} = \frac{p_2}{p_1}.$$

Величина  $k$  называется *коэффициентом удара* (или *импульса*), а величина  $k^2$  называется *коэффициентом восстановления энергии*.

Коэффициент  $k$  может быть определен непосредственно из опыта. Для этого достаточно заметить высоту, с которой шарик падает на горизонтальную плоскость, и высоту, до которой шарик опять поднимается после удара о плоскость. Вот некоторые данные опытов, произведенных с шариками, падавшими с высоты 40 см:

удар слоновой кости о сталь . . . . .	$k = 0,8$
удар слоновой кости о слоновую кость . . . . .	0,9
удар дерева о дерево . . . . .	0,5

Если произвести опыт со свинцовым шариком, или вообще шариком из мягкого материала, то при соприкосновении с деревянной плоскостью шарик сплюснется и совсем не подскочит обратно. В этом случае мы должны приписать коэффициенту  $k$  значение, равное нулю.

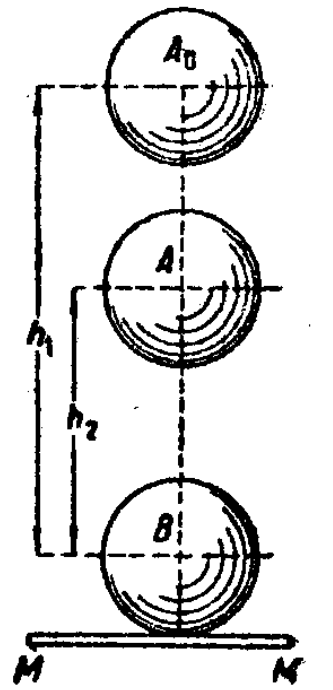


Рис. 124. Нормальное падение шара на плоскость.

Приводя результаты опытов, мы указали также и высоту, с которой шар падал на плоскость, потому что это отчасти влияет на коэффициент восстановления  $k$ .

**134. Отражение шара от плоскости.** Если шар ударяется о плоскость, двигаясь под некоторым углом к ее нормали (рис. 125) (бильярдный шар ударяется о борт), то мы

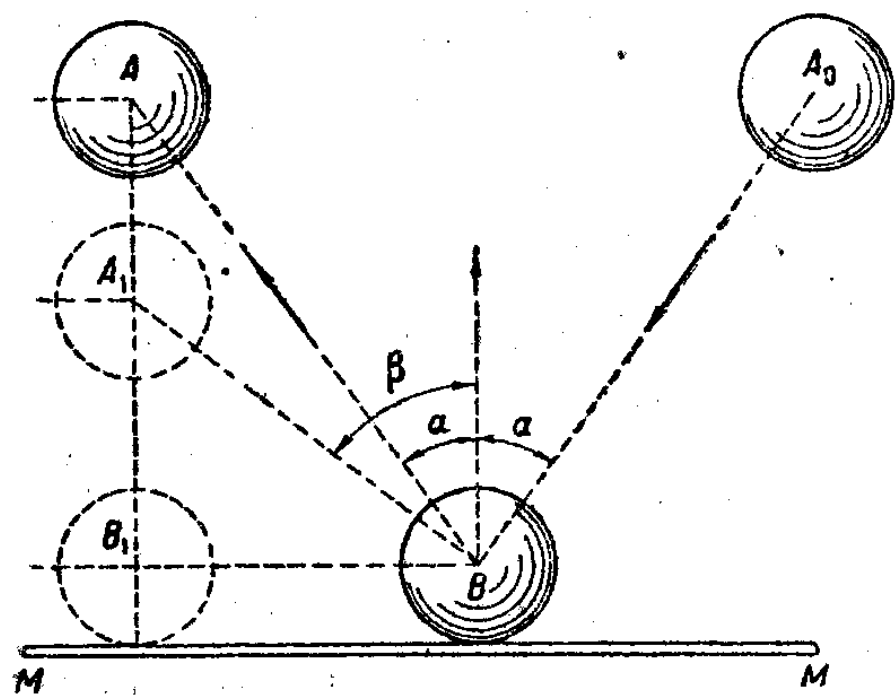


Рис. 125. Отражение шара от плоскости.

можем разложить скорость движения шара на две составляющие: одну из них  $v_t$  взять параллельно плоскости и другую  $v_n$  — нормально к плоскости. Если предположить, что поверхности шара и плоскости совершенно гладкие, т. е. пренебречь силой трения, то можно положить тангенциальные составляющие скорости до и после удара  $v_{t1}$  и  $v_{t2}$  одинаковыми. Нормальная же составляющая скорости, как и при нормальном падении, изменит свой знак и может изменить свою величину, если  $k$  не равно единице. Итак, мы можем положить:

$$v_{t2} = v_{t1}; \quad v_{n2} = k \cdot v_{n1}.$$

Если мы обозначим через  $\alpha$  и  $\beta$  углы, образуемые направлением движения шара с нормалью к плоскости (рис. 125) до и после его удара о плоскость, то можем написать:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_{t1}}{v_{n1}}; \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{v_{t2}}{v_{n2}}$$

и, следовательно,

$$\operatorname{tg} \alpha : \operatorname{tg} \beta = \frac{v_{t1}}{v_{t2}} \cdot \frac{v_{n2}}{v_{n1}} = k.$$

Как видим, известное правило, что угол падения равен углу отражения ( $\alpha = \beta$ ), может быть применено только в том случае, если коэффициент восстановления  $k$  равен единице.

**135. Соударение вполне упругих шаров.** Теперь представим себе два шара массы  $m_1$  и  $m_2$ , которые обладают скоростями  $v_1$  и  $v_2$ . Если эти шары во время своего движения приблизятся друг к другу настолько, что расстояние между их центрами делается равным сумме их радиусов, то произойдет удар. После удара скорости шаров могут оказаться иными и по величине и по направлению; мы их обозначим через  $u_1$  и  $u_2$ . На рис. 126 изображены эти шары в момент соприкосновения, и  $MM$  означает плоскость, проведенную через точку соприкосновения шаров. Опять мы предположим поверхности шаров совершенно гладкими и разложим

каждую скорость  $v_1$  и  $v_2$  на две составляющие: одну возьмем параллельно плоскости соприкосновения, а другую по нормали к плоскости. Первые составляющие не изменятся во время удара, тогда как нормальные составляющие могут измениться. Обозначим нормальные составляющие скоростей шаров до и после удара через  $v_{n1}, v_{n2}$  и  $w_{n1}, w_{n2}$ . Тогда мы можем для этих составляющих написать два уравнения.

Во-первых, уравнение импульсов, которое должно выразить, что общий импульс обоих шаров вместе не изменяется во время удара (для импульсов, нормальных к  $MM$ ):

$$m_1 v_{n1} + m_2 v_{n2} = m_1 w_{n1} + m_2 w_{n2};$$

$$m_1 (v_{n1} - w_{n1}) = -m_2 (v_{n2} - w_{n2}).$$

Затем уравнение сохранения энергии (мы предполагаем шары вполне упругими):

$$m_1 v_{n1}^2 + m_2 v_{n2}^2 = m_1 w_{n1}^2 + m_2 w_{n2}^2;$$

$$m_1 (v_{n1}^2 - w_{n1}^2) = -m_2 (v_{n2}^2 - w_{n2}^2).$$

Деля уравнение энергии на уравнение импульсов, имеем:

$$v_{n1} - v_{n2} = -(w_{n1} - w_{n2}).$$

Это означает, что относительная скорость, нормальная к плоскости соприкосновения  $MM$ , меняет свой знак (ср. 133, 134).

Это уравнение вместе с уравнением импульсов позволяет определить  $w_{n1}$  и  $w_{n2}$ , т. е. нормальные составляющие скоростей после удара. Мы получаем (опуская значки  $n$ ):

$$w_1 (m_1 + m_2) = (m_1 - m_2) v_1 + 2m_2 v_2;$$

$$w_2 (m_1 + m_2) = 2m_1 v_1 + (m_2 - m_1) v_2.$$

Этими формулами и решается вся задача, так как тангенциальные составляющие скоростей при ударе не изменяются.

Мы предлагаем читателю повторить этот расчет, введя в него коэффициент удара  $k$ . Мы заметим только, что уравнение импульсов останется неизменным, а при делении уравнения энергии на уравнение импульсов мы получаем:

$$k = \frac{w_2 - w_1}{v_1 - v_2}.$$

В результате вместо вышеполученных уравнений для  $w_1$  и  $w_2$  мы теперь имеем:

$$w_1 (m_1 + m_2) = (m_1 - km_2) v_1 + (1 + k) m_2 v_2;$$

$$w_2 (m_1 + m_2) = (1 + k) m_1 v_1 + (m_2 - km_1) v_2.$$

Потеря энергии при соударении выразится формулой:

$$\Delta T = \frac{1}{2} m_1 (v_1^2 - w_1^2) + \frac{1}{2} m_2 (v_2^2 - w_2^2) =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (1 - k^2) (v_1 - v_2)^2.$$

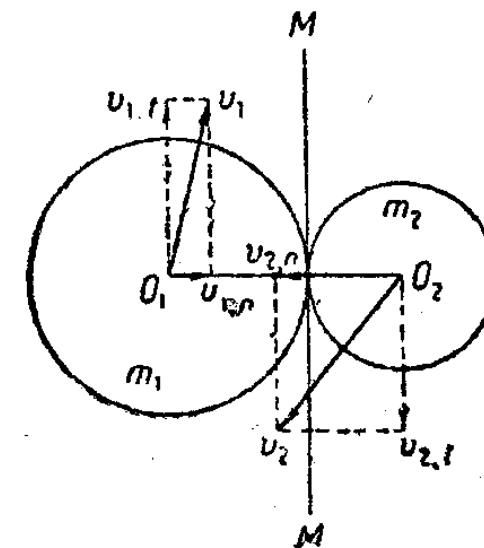


Рис. 126. Соударение шаров

Для вполне неупругих шаров  $k=0$ , и мы получаем:

$$w_1 = w_2 = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}.$$

Шары продолжают двигаться, не расходясь друг от друга, с общей нормальной составляющей скорости  $w$ .

136. Частные случаи соударения вполне упругих шаров. Полезно рассмотреть некоторые частные случаи соударения упругих шаров. Мы ограничимся случаями, когда оба шара движутся по одной линии (т. е. будем рассматривать только нормальные составляющие скоростей).

Если один из шаров имеет сравнительно с другим шаром очень большую массу  $m_1$ , то, разделив числитель и знаменатель полученных нами выражений для  $w_1$  и  $w_2$  на  $m_1$ , мы получим:

$$w_1 \left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right) = \left(1 - \frac{m_2}{m_1}\right) v_1 + 2 \frac{m_2}{m_1} v_2;$$

$$w_2 \left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right) = 2v_1 + \left(\frac{m_2}{m_1} - 1\right) v_2.$$

Если пренебречь членами, содержащими множитель малой величины  $\frac{m_2}{m_1}$ , то получим:

$$w_1 = +v_1;$$

$$w_2 = +2v_1 - v_2.$$

На основании этих уравнений мы можем написать:

$$w_1 - w_2 = -(v_1 - v_2).$$

Замечая, что  $(v_1 - v_2)$  представляет собой относительную нормальную скорость шаров, мы можем сказать, что в этом случае относительная (нормальная) скорость изменяет свой знак. Если скорость более массивного шара была до соударения равна нулю, то она и после удара останется равной нулю, а для нормальной составляющей скорости менее массивного шара мы получим:

$$w_2 = -v_2,$$

т. е. тот же результат, что и при ударе о неподвижную плоскость

Если массы обоих шаров одинаковы, то наши формулы (при  $m_1 = m_2$ ) дают:

$$w_1 = v_2,$$

$$w_2 = v_1.$$

Мы можем выразить этот результат словами, сказав, что шары при соударении обмениваются своими скоростями.

Если один из двух одинаковых по массе шаров был в покое ( $v_1 = 0$ ), а другой двигался прямо на него со скоростью  $v_2$ , то после удара второй шар окажется в покое ( $w_2 = 0$ ), а первый начнет двигаться со скоростью  $v_2$ , и притом в ту же сторону.

Если первый шар находился в покое, а второй двигался не совсем по направлению к центру покоящегося шара, а только задел его боком, то для определения движения шаров после удара нужно рассмотреть отдельно нормальную составляющую скорости и тангенциальную ее составляющую. Последняя составляющая не изменится, тогда как первая целиком передается покоящемуся шару. Предоставляем читателю рассчитать этот случай более подробно.

Все указанные случаи соударения шаров можно воспроизвести на бильярде.

137. Внецентренный (косой) удар. До сих пор мы разбирали только такие случаи удара, в которых импульс силы был направлен к центру тяжести тела. Даже в тех случаях, когда скорость одного из шаров была направлена не в центр другого шара, мы все-таки имели дело с *центральной* ударом, потому что мы предполагали, что поверхности шаров настолько гладки, что при соударении шары взаимодействуют только *нормальными* составляющими своих импульсов; но нормальные составляющие направлены к центру шаров. Теперь мы разберем случай, когда импульс удара имеет *внецентральное* направление. Мы предположим, что тело до удара находилось в покое. Импульс мгновенной силы  $Q$  будет образовывать по отношению к центру тяжести  $C$  (рис. 127) некоторый момент импульса

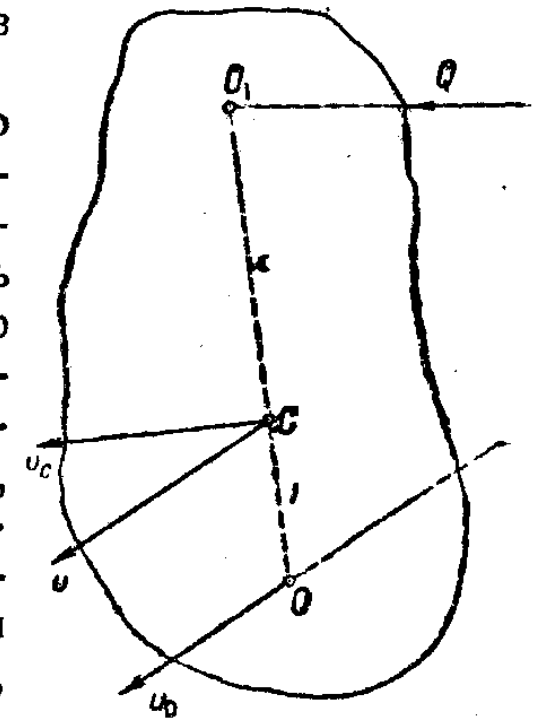


Рис. 127. Внецентренный удар.

$$K = [aQ].$$

Для большей наглядности рассуждений мы пока предположим, что момент  $K$  имеет направление по одной из *главных* осей инерции тела. В таком случае момент импульса твердого тела выразится через угловую скорость вращения тела  $u$  простой формулой (стр. 23, 17):

$$K = Au,$$

и мы можем сейчас же определить угловую скорость, приобретенную телом вследствие мгновенного импульса  $Q$ :

$$u = \frac{K}{A}.$$

Если направление импульса  $Q$  перпендикулярно к плечу  $a$ , как это у нас изображено на рис. 127, и мы обозначим радиус инерции тела через  $k$ , то можем выразить угловую скорость  $u$ , наступившую после удара, через импульс

$$u = \frac{aQ}{k^2 m}.$$

До сих пор мы использовали для расчета только уравнение моментов. Одновременно с этим уравнение импульсов дает нам для скорости  $v_c$  центра тяжести после удара величину

$$v_c = \frac{Q}{m}.$$

Итак, если тело находилось в покое и ему был сообщен мгновенный импульс  $Q$  с моментом вокруг центра тяжести и этот момент импульса имел направление, параллельное одной из главных осей инерции тела, то тело будет иметь после удара, во-первых, поступательную скорость

$$v_c = \frac{Q}{m},$$

величина и направление которой совершенно такие же, как если бы удар был произведен по центру тяжести тела; но, кроме того, тело получит вращательную скорость, определяемую формулой:

$$u = \frac{1}{k^2} \left[ a \frac{Q}{m} \right] = \frac{1}{k^2} [av_c].$$

138. Общий случай внецентренного удара. Мы предположили, что начальный момент импульса был направлен по одной из главных осей инерции тела; в более общем случае вращательная скорость после удара может быть определена из тензорного соотношения между моментом импульса  $K$  и угловой скоростью  $u$  (стр. 23, 17):

$$\begin{aligned} K_x &= +Au_x - Fu_y - Eu_z; \\ K_y &= -Fu_x + Bu_y - Du_z; \\ K_z &= -Eu_x - Du_y + Cu_z. \end{aligned}$$

Из этих трех уравнений по данным  $K_x, K_y, K_z$  определяются три проекции угловой скорости  $u_x, u_y, u_z$ .

Применяя векторные обозначения, мы можем написать:

$$K = T_J u, \quad u = T_J^{-1} K.$$

Геометрически же это означает, что нужно провести плоскость, перпендикулярную данному направлению  $K$  и касательную к эллипсоиду энергии, тогда радиус-вектор, проведенный в точку касания, будет представлять по величине и по направлению вектор угловой скорости  $u$  после удара.

Мы предполагали, что тело до удара находилось в покое. Если же тело уже обладало поступательной скоростью  $v_0$  и вращательной скоростью  $u_0$ , то приобретенные при ударе скорости  $v$  и  $u$  сложатся (геометрически) с первоначальными, и тело будет после удара двигаться со скоростями  $(v_0 + v)$  и  $(u_0 + u)$ .

Подобный случай мы рассматривали в 84, стр. 110 (удар по оси полчка).

139. Мгновенная ось при внецентренном ударе. Мы вернемся опять к тому частному случаю, который мы рассматривали в 137, а именно,

когда момент импульса параллелен одной из главных осей инерции тела, и определим положение мгновенной оси вращения тела тотчас после удара. Эта ось будет, очевидно, параллельна моменту импульса  $k$  и угловой скорости  $u$ . Что же касается расстояния этой оси от центра тяжести  $C$  (рис. 127), то оно определяется уравнением (ср. стр. 11, 5):

$$v_c = b \cdot u.$$

Подставляя сюда найденные выше значения  $v_c$  и  $u$ , получаем:

$$a \cdot b = k^2.$$

Мы получили, таким образом, интересное соотношение между плечом мгновенного импульса  $a$ , расстоянием мгновенной оси от центра тяжести  $b$  и радиусом  $k$  инерции тела вокруг центра тяжести. Это то же самое соотношение, которое мы получили для физического маятника (стр. 77, 61), причем в физическом маятнике  $a$  и  $b$  означали расстояния его центра тяжести от точки привеса и от центра качания. Отсюда заключаем, что если произведем удар по центру качания маятника в направлении, перпендикулярном к его длине, то получим вращение тела вокруг оси, проходящей через точку привеса. Так как мгновенная ось в момент удара остается неподвижной, то, очевидно, реакция оси привеса маятника будет равна нулю: ось не будет чувствовать удара. При ударе в другие точки тела мы, вообще говоря, получим действие удара и на ось.

Примером только что сказанного может служить известное наблюдение при работе молотом, а именно: далеко небезразлично, за которое место ручки молота мы держим его при ударе; можно найти такое место ручки, чтобы удар не отражался на руке работающего. Это место и будет представлять собой положение мгновенной оси при ударе, и оно определяется вышенаписанным соотношением; но его можно определить довольно точно и непосредственным ощущением.

Вопрос о реакции оси вращения при ударе мы рассмотрим в более общем виде в следующем параграфе.

140. Реакция оси при внецентренном ударе. Положим, что нам дано твердое тело, способное свободно вращаться вокруг неподвижной оси  $OZ$  (рис. 128), и на это тело подействовали мгновенные силы, величина и направление которых определяются вектором  $Q$  с определенной точкой приложения  $P$ ; впрочем, вместо положения этой точки  $P$  нам достаточно знать момент  $M$  этой силы  $Q$  вокруг начала координат  $O$ .

Требуется определить движение тела, т. е. его вращение вокруг оси  $OZ$  после удара, предполагая, что в момент удара тело было в покое.

Мы будем писать уравнения и в векторной и в скалярной форме. Декартовы координаты мы направим следующим образом. Ось  $OZ$  направим по оси вращения тела; плоскость  $OXY$  проведем перпендикулярно

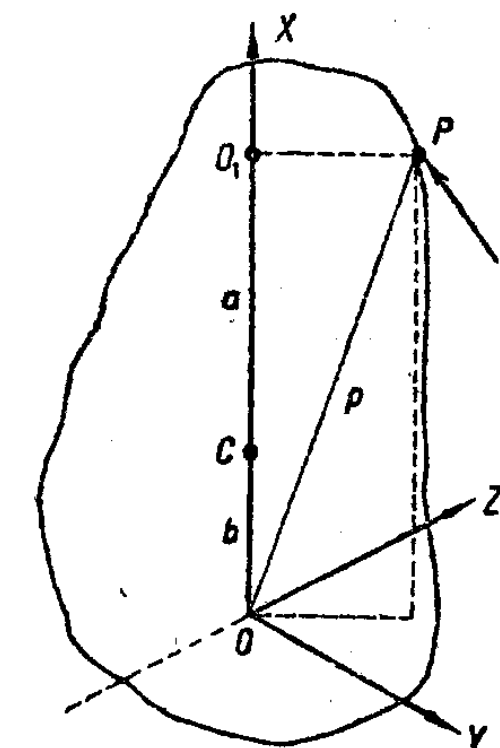


Рис. 128. Реакция оси при внецентренном ударе.

к оси вращения и через центр тяжести тела, направление же осей  $OX$  и  $OY$  в этой плоскости мы пока оставим неопределенным.

Расстояние центра тяжести от оси вращения мы обозначим через  $r$ , и, следовательно, координаты центра тяжести будут:

$$r_z = 0; \quad r_x = x; \quad r_y = y.$$

Так как вращение тела может происходить только вокруг оси  $OZ$ , то проекции угловой скорости  $\omega$  на другие две оси  $OX$  и  $OY$  будут равны нулю.

Приняв это во внимание, мы можем для импульса тела написать:

$$P = mv_c = m [\omega r]; \quad \begin{aligned} P_x &= -m\omega y; \\ P_y &= +m\omega x; \\ P_z &= 0. \end{aligned}$$

Момент импульса всего тела будет иметь своими проекциями на оси координат (ср. стр. 23, 17; при  $u_x = u_y = 0$ ):

$$K = T_1(\omega); \quad \begin{aligned} K_x &= -Eu; \\ K_y &= -Du; \\ K_z &= +Cu. \end{aligned}$$

Напишем уравнение моментов, обозначив через  $L$  момент реактивных сил:

$$K + M + L = 0; \quad \begin{aligned} L_x &= -M_x + Eu; \\ L_y &= -M_y + Du; \\ L_z &= -M_z - Cu. \end{aligned}$$

Прежде всего заметим, что  $L_z$  должно равняться нулю, потому что мы предполагаем, что тело может свободно вращаться вокруг неподвижной оси  $OZ$ , и никакого реактивного момента вокруг этой оси оказывать не может (если не считать силы трения в подшипниках, которую мы не принимаем во внимание). Это дает нам возможность из последнего уравнения непосредственно определить угловую скорость вращения тела после удара:

$$u = \frac{M_z}{C} = \frac{M_z}{mk}.$$

Здесь  $k$  означает радиус инерции тела вокруг оси  $OZ$ . Подставляем это значение угловой скорости в первые два уравнения:

$$\begin{aligned} L_x &= -M_x + E \frac{M_z}{mk_1^2} \\ L_y &= -M_y + D \frac{M_z}{mk_1^2}. \end{aligned}$$

Эти формулы показывают нам, что реактивные моменты оси  $L_x$  и  $L_y$  произойдут от двух причин: во-первых, от того, что на тело действовали мгновенные силы с моментами  $M_x$  и  $M_y$ , и, во-вторых; вследствие

реакции инерциальных моментов  $E\omega$  и  $D\omega$ , пропорциональных возникшей при ударе угловой скорости вращения и вокруг оси  $OZ$ . Это те же инерциальные моменты, которые мы уже рассматривали при изучении явления вращения тела вокруг неподвижной оси (стр. 81, 66). Таким образом, если даже моменты  $M_x$  и  $M_y$  будут равны нулю и будет действовать только  $M_z$ , тем не менее, мы получим доминирующие моменты на оси  $L_x$  и  $L_y$ . Только в том случае  $L_x$  и  $L_y$  равны нулю, если  $E$  и  $D$  равны нулю, т. е. если тело вращается вокруг одной из главных осей инерции. Это вполне сходится с тем, что мы нашли раньше (стр. 81, 66). Однако нет необходимости в том, чтобы ось вращения непременно проходила через центр тяжести тела.

Теперь обратимся к уравнениям импульсов и определим из них реакцию оси  $R$ :

$$P + Q + R = 0; \quad \begin{aligned} R_x &= -Q_x + m\omega y; \\ R_y &= -Q_y - m\omega x; \\ R_z &= -Q_z. \end{aligned}$$

Последнее из этих уравнений дает нам непосредственно поперечную реакцию оси вращения. Для определения поперечной реакции оси  $R_x$  и  $R_y$  нам остается только подставить в эти уравнения значение угловой скорости вращения тела  $\omega$ , найденное нами из уравнения моментов.

Но гораздо нагляднее будет поступить следующим образом. Направим ось  $OX$  к центру тяжести тела (выбор направления осей  $OX$  и  $OY$  мы оставили свободным). Тогда координаты центра тяжести будут  $x = a$  и  $y = 0$ . Если мы обозначим расстояние точки приложения внешнего импульса  $Q$  от оси вращения через  $p$ , то момент импульса вокруг оси  $OZ$  будет выражаться формулой:

$$M_z = [p Q]_z = p_x Q_y - p_y Q_x,$$

и угловая скорость вращения тела после удара будет:

$$\omega = \frac{1}{mk_1^2} (p_x Q_y - p_y Q_x).$$

Подставляя эти значения в формулы реакций оси, получаем:

$$\begin{aligned} R_x &= -Q_x, \\ R_y &= -Q_y \left( 1 - \frac{p_x a}{k_1^2} \right) + \frac{p_y a}{k_1^2} Q_x. \end{aligned}$$

Первая из этих формул дает реакцию оси, направленную к центру тяжести, тогда как вторая формула дает реакцию, перпендикулярную к линии соединения оси вращения с центром тяжести. Реакция  $R_x$  обращается в нуль только при условии, что  $Q_x = 0$ ; тогда как реакция  $R_y$  может равняться нулю лишь в том случае, если при  $Q_x = 0$ , кроме того, еще соблюдено условие:

$$p_x a = k_1^2.$$

Аналогичное условие мы уже получили в предыдущем параграфе (ср. стр. 203:  $ab = k^2$ ); разница только в том, что прежде  $k$  означало

радиус инерции *вокруг центра тяжести* тела, тогда как теперь  $k_1$  означает радиус инерции *вокруг оси OZ*, отстоящей от центра тяжести на расстоянии  $b$ . Соотношение между этими величинами следующее (стр. 20, 15):

$$k_1^2 = k^2 + b^2.$$

Точно так же и  $p_x$  у нас теперь означает проекцию на ось *OX* расстояния точки приложения импульса  $Q$  от оси вращения, между тем как прежде  $a$  означало расстояние точки приложения импульса от центра тяжести  $O$ . Соотношение между этими величинами (ср. рис. 127):

$$p_x - a = b.$$

Если принять все это во внимание, то легко увидеть, что найденное нами теперь условие тождественно с прежним, а именно:

$$\begin{aligned} p_x a &= k_1^2 = k^2 + a^2, \\ (p_x - a) \cdot a &= k^2, \\ b \cdot a &= k^2. \end{aligned}$$

141. Баллистический маятник. Простой пример внецентренного удара мы имеем в так называемом *баллистическом маятнике*, который иногда служит для определения скорости пули.

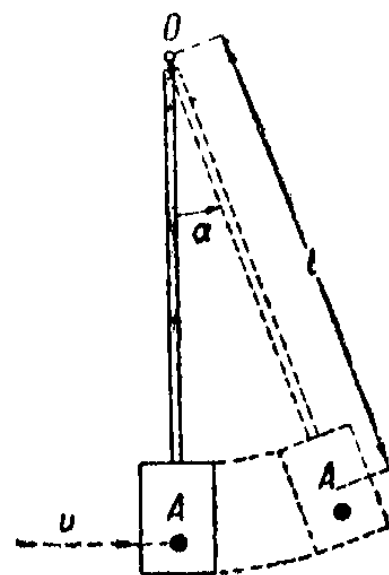


Рис. 129. Баллистический маятник.

Ящик, наполненный песком  $A$  (рис. 129), подвешен на горизонтальной оси  $O$ , вокруг которой он может свободно вращаться. В ящик стреляют с близкого расстояния, причем пуля  $m$  застревает в песке, а весь ящик от сообщенного ему удара (момента импульса) отклоняется от вертикального направления на некоторый угол  $\alpha$ . По этому углу  $\alpha$  и можно определить скорость пули.

Обозначим массу пули через  $m$ , массу ящика с песком через  $M$ ; скорость пули до удара через  $v$ , а общую скорость ящика вместе с пулей в момент непосредственно после удара — через  $\omega$ .

Уравнение импульсов нам дает:

$$mv = (M + m) \omega.$$

Приобретя скорость  $\omega$  и соответствующую кинетическую энергию  $\frac{1}{2} (M + m) \omega^2$ , ящик с пулей, отклонившись, может подняться на высоту  $h$ .

Напишем уравнение энергии, причем потерей энергии при трении пули о песок мы пренебрегаем; если этого не делать, то пришлось бы ввести некоторый коэффициент  $k$ , который нужно было определить из опыта. Итак,

$$\frac{1}{2} (M + m) \omega^2 = (M + m) g \cdot h.$$

Выразив  $h$  через длину маятника  $l$  (приближенно можно для  $l$  считать расстояние центра ящика от точки привеса) и угол отклонения (рис. 129):

$$h = l(1 - \cos \alpha) = 2l \cdot \sin^2 \frac{\alpha}{2},$$

получаем для скорости пули формулу:

$$v = \frac{M + m}{m} \sqrt{2gh} = 2 \frac{M + m}{m} \sqrt{lg \cdot \sin^2 \frac{\alpha}{2}}.$$

Этот способ определения скорости пули хорош по своей простоте, однако в настоящее время имеются другие, более точные способы, где непосредственно определяется *расстояние*, пройденное пулей в точно определяемый промежуток *времени*. Но, конечно, приборы, для этого необходимые, гораздо сложнее.

Мы предлагаем читателю рассчитать баллистический маятник более точно, а именно: введя расстояние центра тяжести ящика с пулей от оси привеса, радиус инерции маятника, коэффициент потери энергии  $k^2$ . Необходимо определить и реакцию оси вращения, чтобы знать, какова должна быть прочность подвеса.

142. Горизонтальный удар кием по бильярдному шару. В предыдущей главе (стр. 191, 131) мы рассматривали движение шара по горизонтальной плоскости при различных начальных условиях; теперь мы обсудим вопрос, каким образом можно реализовать эти начальные условия, сообщая кием толчок бильярдному шару. Кстати это послужит нам наглядным примером применения уравнений предыдущего параграфа.

Сперва мы разберем только *горизонтальные* удары кия в вертикальной плоскости, проходящей через центр (а следовательно, и через точку касания) шара.

Зададимся вопросом, как нужно произвести толчок, чтобы шар начал свое качение по бильярду *без скольжения*. Для того чтобы в момент удара не произошло скольжения, необходимо, чтобы мгновенная ось удара проходила через точку касания шара с плоскостью бильярда. Обозначим через  $z_c$  расстояние центра удара от центра тяжести шара,

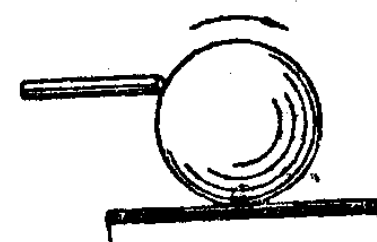


Рис. 130.

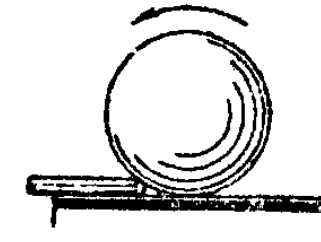


Рис. 131.

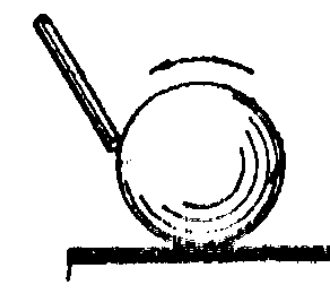


Рис. 132.

Различные удары кием по бильярдному шару.

который при однородности бильярдных шаров совпадает с его геометрическим центром (рис. 130). Если  $a$  означает радиус шара, то условие предыдущего параграфа в применении к данному случаю дает:

$$a \cdot z_c = k^2.$$

Подставляем сюда значение радиуса инерции шара (стр. 186, 127)

$$k^2 = \frac{2}{5} a^2,$$

получаем:

$$z_c = \frac{2}{5} a.$$

Итак, для получения чистого качения горизонтальный удар должен быть сделан выше центра шара, и притом на высоте, равной  $\frac{2}{5}$  радиуса шара. Если мы ударим ниже, то получим качение, сопровождаемое скольжением в направлении движения шара; если же мы ударим выше, то шар во время удара соскользнет назад.

Направим горизонтальный удар кия в центр шара; для этого случая мы должны написать начальные условия в такой форме:

$$K = A \cdot u_0 = 0; \quad v_0 = v_{s0}.$$

Действительно, момент импульса вокруг центра тяжести равен нулю, а импульс передается непосредственно центру тяжести тела, и начальная скорость  $v_0$  будет представлять собой скольжение. Дальнейшее движение шара будет происходить по уравнениям (стр. 187, 128):

$$\begin{aligned} v &= v_0 - fg \cdot t, \\ v_s &= v_0 - \frac{7}{2} fg \cdot t, \\ u &= 0 + \frac{5}{2a} fg \cdot t. \end{aligned}$$

Скольжение шара по плоскости бильярда прекратится в момент ( $v_s = 0$ )

$$t_1 = \frac{2}{7} \frac{v_0}{fg},$$

когда шар уже прошел расстояние

$$s = v_0 t_1 - \frac{1}{2} fg t_1^2 = \frac{2}{7} \frac{v_0^2}{fg} \left[ 1 - \frac{1}{7} \right] = \frac{12}{49} \frac{v_0^2}{fg}.$$

После этого момента поступательная и вращательная скорость шара будут равны соответственно:

$$v_1 = \frac{5}{7} v_0; \quad u_1 = \frac{5}{7} \frac{v_0}{a}.$$

Нетрудно видеть, что это действительно соответствует чистому качению, а именно:

$$v_1 = u_1 \cdot a.$$

Теперь предположим, что шар получил горизонтально направленный удар очень близко к его точке касания (рис. 131). Чтобы излишне не усложнять формулы, мы даже предположим, что  $z_c = a$ , т. е. удар произойдет в самой точке касания.

Тогда начальные условия будут таковы:

$$K_0 = -mv_0 a = Au_0;$$

откуда:

$$\begin{aligned} u_0 &= -\frac{a}{k^2} v_0 = -\frac{5}{2a} v_0, \\ v_{s0} &= v_0 - au_0 = \frac{7}{2} v_0, \end{aligned}$$

и дальнейшее движение шара будет происходить по уравнениям:

$$\begin{aligned} v &= v_0 - fg \cdot t, \\ v_s &= v_{s0} - \frac{7}{2} fg \cdot t, \\ u &= -\frac{5}{2} \cdot \frac{v_0}{a} + \frac{5}{2a} fg \cdot t = -\frac{5}{2a} [v_0 - fg \cdot t]. \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что по прошествии времени

$$t_1 = \frac{2}{7} \frac{v_{s0}}{fg} = \frac{v_0}{fg}$$

прекратится не только скольжение шара  $v_s = 0$ , но одновременно с ним обратятся в нуль и его поступательная, и его вращательная скорости: шар совсем остановится ( $v = v_s = u = 0$ ).

До сих пор мы предполагали удар в центральной плоскости шара. Если удар будет произведен правее или левее центра, то, кроме разобранных выше начальных условий, появится еще момент импульса *вокруг вертикальной оси* шара, и шар начнет вращаться вокруг этой оси с угловой скоростью

$$u = \frac{K_0}{A}.$$

Это движение прибавится к тем, которые мы рассмотрели выше. Так как вращение вокруг оси, проходящей через точку касания шара, может происходить почти без трения, то, угловая скорость этого вращения может сохраниться надолго. Даже и в том случае, когда шар перестанет катиться (см. выше), он может еще продолжать вращаться вокруг своей вертикальной оси.

143. Косой удар по шару. Мы видели в предыдущем параграфе, что при *горизонтальном* ударе почти у точки касания шара к бильярдной плоскости шар, правда, получает вращение, *обратное* тому, которое ему необходимо для качения вперед, однако, это обратное движение уничтожается трением, и шар не катится назад, а останавливается, пройдя некоторое расстояние вперед. Нельзя ли, однако, ударить по шару так, чтобы получить и его *обратное поступательное движение*? Для этого следовало бы сообщить шару момент импульса еще больший, чем мы это делали. Но мы ударяли уже в самой низкой точке шара, а потому увеличить момент импульса больше уже невозможно. Тем не менее, получить обратное движение бильярдного шара вполне возможно (как это хорошо известно игрокам на бильярде), но для этого нужно ударять не в горизонтальном направлении (как это мы делали до сих пор), а произвести



косой удар по направлению к плоскости бильярда (рис. 132). Хотя при таком косом ударе мы тоже не можем произвести большего момента импульса, чем прежде, но зато горизонтальная составляющая импульса получается при этом меньше. Обозначив начальную скорость шара через  $v_0$ , а начальную угловую скорость (вокруг горизонтальной оси) через  $-u_0$  (теперь:  $-u_0 \neq \frac{5}{2a} v_0$ ), мы имеем уравнения движения:

$$v = v_0 - fg \cdot t,$$

$$v_s = v_0 + au_0 - \frac{7}{2} fg \cdot t,$$

$$u = -u_0 + \frac{5}{2a} fg \cdot t.$$

При сравнительно *меньшей* начальной скорости  $v_0$  и время скольжения  $t_1$  делается меньше, и второй член последней формулы остается меньше первого, а потому к концу скольжения у шара еще может остаться некоторая *часть* обратной угловой скорости, которая и покатит шар обратно (мы предоставляем читателю самому развить это более подробно, задавшись определенным углом и определенной точкой приложения кия).

Наконец, для получения движения бильярдного шара по параболе, о котором мы говорили на стр. 193, 131, тоже необходим *косой* удар. В справедливости этого читатель может сам убедиться и на основании теории, и из непосредственного опыта.

Одно следствие косо́го удара мы оставили без внимания. Дело в том, что при косом ударе, направленном *на плоскость* бильярда, шар получает некоторый импульс *вертикально вниз*. Результат этого импульса должен быть такой же, как и при падении шара на бильярдную плоскость с некоторой высоты (стр. 196, 133); другими словами, шар должен будет подскочить после удара на некоторую высоту. Это действительно и наблюдается на опыте. В наших расчетах это обстоятельство не принято во внимание.

## ГЛАВА ОДИННАДЦАТАЯ.

### ВЫЧИСЛЕНИЯ МОМЕНТОВ ИНЕРЦИИ.

144. Предварительные замечания. Формулы для моментов инерции тел различной формы читатель может легко найти в различных технических справочниках. Поэтому мы считаем достаточным привести здесь примеры вычислений моментов инерции таких простейших форм, которые наиболее часто встречаются в физической практике.

Тела мы будем предполагать однородными, всюду одинаковой плотности  $\rho$ . Но множитель  $\rho$  мы будем для упрощения формул опускать.

При вычислении моментов инерции мы будем поступать следующим образом. Поместив в центре тяжести тела систему координат  $OXYZ$ , оси которой направлены по *главным* осям инерции системы (положение центра тяжести и направление главных осей инерции на наших примерах легко определяются из соображений о симметрии тела), мы будем вычислять сперва интегралы (ч. II, стр. 27, 16) (ч. III, стр. 18, 12):

$$I_{xy} = \int dM \cdot z^2; \quad I_{yz} = \int dM x^2; \quad I_{zx} = \int dM \cdot y^2,$$

где  $dM$  означает элемент массы тела.

Сложив эти интегралы попарно, получаем моменты инерции относительно осей:

$$I_x = A = \int dM \cdot (z^2 + y^2); \quad I_y = B = \int dM \cdot (x^2 + z^2); \\ I_z = C = \int dM \cdot (y^2 + x^2).$$

Деля момент инерции на массу тела, получаем радиус инерции (ч. II, стр. 277, 185) (ч. III, стр. 20, 15)

$$k^2 = \frac{I}{M}.$$

В некоторых случаях *осевой симметрии* тела удобнее вычислять непосредственно момент инерции вокруг оси симметрии по формуле:

$$I_z = \int dM \cdot r^2.$$

Зная *главные* моменты инерции относительно центра тяжести тела, мы можем вычислить момент инерции вокруг любой оси, проходящей через центр тяжести (стр. 18, 12) и вокруг любой ей параллельной оси (стр. 21, 15).

145. Параллелепипед (рис. 133). Центр тяжести прямоугольного параллелепипеда со сторонами  $2a$ ,  $2b$ ,  $2c$  помещается в точке пересечения трех плоскостей, проведенных через середины сторон и параллельно его граням (рис. 133). Эти три плоскости мы и возьмем за плоскости координат.

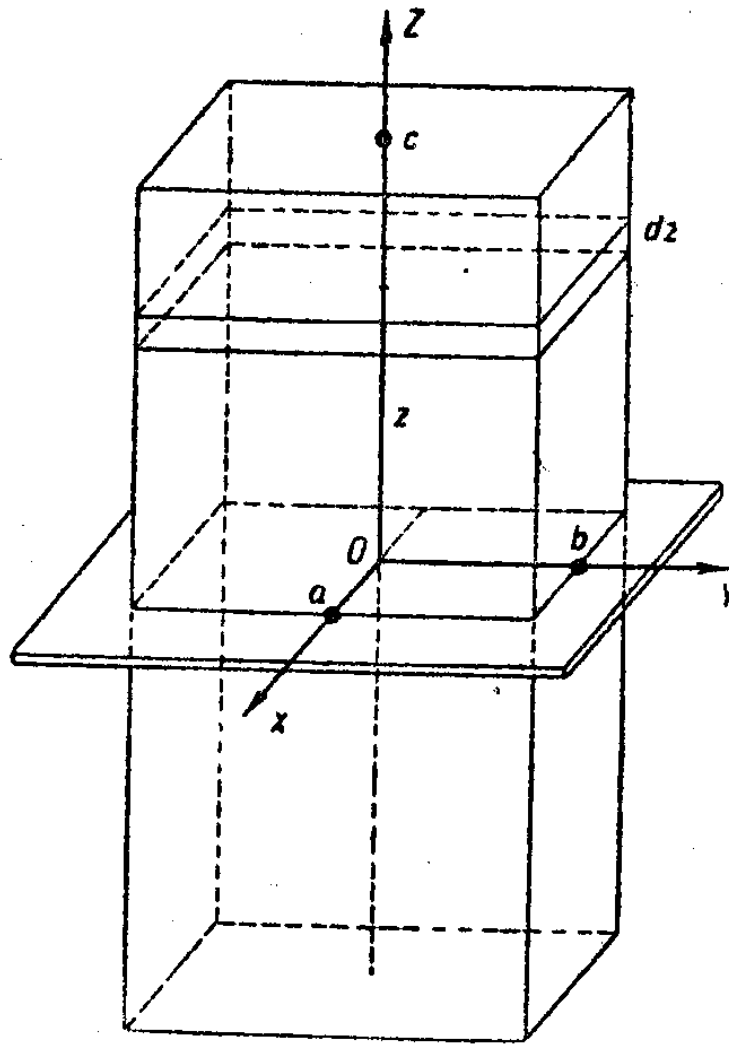


Рис. 133. Параллелепипед.

Масса параллелепипеда (при плотности  $\rho = 1$ ) равна

$$M = 8 \cdot abc.$$

Определим момент инерции параллелепипеда относительно плоскости  $XU$ . Для этого расслоим параллелепипед плоскостями, параллельными плоскости  $XU$ , на тонкие слои толщиной  $dz$ . Масса каждого такого слоя будет равна

$$dM = 4ab \cdot dz,$$

и момент инерции ее относительно плоскости  $XU$  будет

$$dI_{xy} = 4abz^2 \cdot dz.$$

Интегрируя по всем подобным слоям, получаем:

$$I_{xy} = 4ab \int_{-c}^{+c} z^2 \cdot dz = 8abc \cdot \frac{c^2}{3} = \frac{1}{3} Mc^2.$$

Совершенно таким же образом получаем моменты инерции относительно плоскостей  $YZ$  и  $ZX$ :

$$I_{yz} = \frac{1}{3} Ma^2; \quad I_{zx} = \frac{1}{3} Mb^2.$$

Складывая эти выражения попарно, получаем моменты инерции вокруг осей:

$$I_x = A = \frac{1}{3} M(b^2 + c^2); \quad I_y = B = \frac{1}{3} M(c^2 + a^2);$$

$$I_z = C = \frac{1}{3} M(a^2 + b^2).$$

Радиусы инерции будут равны соответственно:

$$k_x^2 = \frac{1}{3}(b^2 + c^2); \quad k_y^2 = \frac{1}{3}(c^2 + a^2); \quad k_z^2 = \frac{1}{3}(a^2 + b^2).$$

В частном случае для куба мы имеем  $2a = 2b = 2c = d$  стороне куба. Получаем:

$$A = B = C = \frac{1}{6} Md^2,$$

$$k^2 = \frac{1}{6} d^2.$$

146. Круговой цилиндр (рис. 134). Обозначим радиус цилиндра через  $a$ , а длину (или высоту) его через  $2c$ . Ось цилиндра примем за ось  $OZ$  декартовых координат, плоскость  $XU$  которых проведем через середину длины цилиндра. Направление осей  $OX$  и  $OY$  (перпендикулярных друг другу) может быть любое.

Масса этого цилиндра ( $\rho = 1$ ) равна

$$M = \pi a^2 \cdot (2c).$$

Расслоим цилиндр плоскостями, параллельными плоскости  $XU$ , на тонкие диски толщиной  $dz$ . Масса каждого такого диска равна

$$dM = \pi a^2 \cdot dz,$$

и момент инерции его относительно плоскости  $XU$  равен

$$dI_{xy} = \pi a^2 \cdot z^2 dz.$$

Интегрируя по всем подобным дискам, получаем момент инерции всего цилиндра относительно плоскости  $XU$ :

$$I_{xy} = \pi a^2 \int_{-c}^{+c} z^2 \cdot dz = \frac{1}{3} \pi a^2 \cdot 2c^3 = \frac{1}{3} Mc^2.$$

Для определения момента инерции относительно плоскостей  $YZ$  и  $ZX$  рассмотрим один из дисков (рис. 135). Элемент площади такого диска в цилиндрических координатах будет выражаться формулой:

$$dS = r \cdot dr \cdot da.$$

Расстояние этого элемента от плоскости  $OXZ$  (рис. 135) равно  $r \sin \alpha$ , и момент инерции его относительно этой плоскости равен

$$dI_{xz} = (r^3 \cdot dr) (\sin^2 \alpha \cdot da) \cdot dz.$$

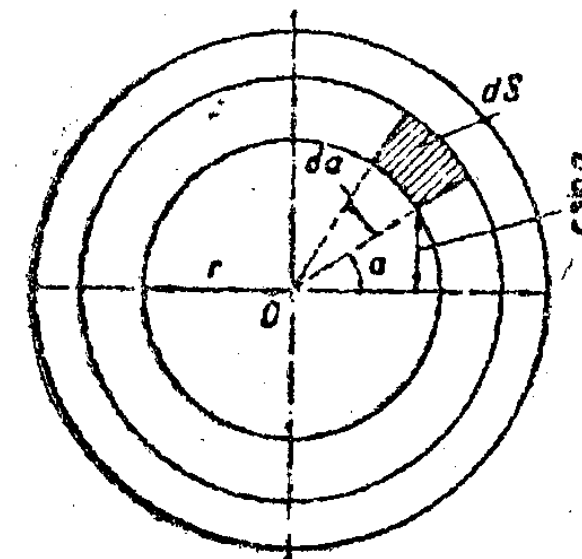


Рис. 135. Разрез кругового цилиндра.

Для того чтобы получить момент инерции всего цилиндра относительно плос-

кости  $OXZ$ , мы должны проинтегрировать это выражение по  $\alpha$  между пределами  $\alpha=0$  и  $\alpha=2\pi$ , причем

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 \alpha \cdot d\alpha = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} (1 - \cos 2\alpha) \cdot d\alpha = \pi.$$

Пределы интегрирования для  $r$  и  $z$  будут соответственно равны:

$$r=0 \rightarrow r=a; \quad z=-c; \quad z=+c.$$

Таким образом момент инерции цилиндра относительно плоскостей, проходящих через его ось будет выражаться формулой:

$$I_{yz} = I_{zx} = \pi (2c) \int_0^a r^3 \cdot dr = \frac{\pi a^4}{4} (2c) = M \frac{a^2}{4}.$$

Складывая моменты инерции относительно плоскостей попарно, получаем моменты инерции относительно (или вокруг) осей координат:

$$I_x = I_y = M \left( \frac{a^2}{4} + \frac{c^2}{3} \right); \quad I_z = M \frac{a^2}{2}.$$

Радиусы инерции будут равны соответственно:

$$k_x^2 = k_y^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{c^2}{3}; \quad k_z^2 = \frac{a^2}{2}.$$

Для сравнительно *тонкого диска* можно пренебречь длиной цилиндра  $c$  по сравнению с его радиусом и написать:

$$k_x^2 = k_y^2 = \frac{a^2}{4}; \quad k_z^2 = \frac{a^2}{2}.$$

147. *Полый цилиндр (обруч)*. Положим, что поперечное сечение цилиндра ограничено двумя концентрическими окружностями радиусов  $a_0$  и  $a$ .

Масса такого цилиндра (при  $\rho=1$ ) при длине его  $2c$  равна:

$$M = \pi (a^2 - a_0^2) (2c).$$

Для определения момента инерции относительно оси симметрии цилиндра мы можем (в отличие от предыдущего параграфа) поступить таким образом. Выделим мысленно кольцеобразный элемент поперечного сечения при радиусе  $r$  (рис. 135); его площадь равна

$$dS = 2\pi r \cdot dr,$$

и момент инерции слоя, толщиной  $dz$ , относительно оси симметрии равен

$$dI_z = 2\pi r^3 \cdot dr \cdot dz.$$

Интегрируя по всем кольцеобразным элементам между пределами  $r=a_0$  и  $r=a$ , получаем:

$$I_z = \frac{\pi}{2} (a^4 - a_0^4) (2c) = M \frac{a^2 + a_0^2}{2}.$$

Если бы цилиндр был сплошной ( $a_0=0$ ), то мы получили бы

$$I_z = M \frac{a^2}{2}$$

в согласии с результатом предыдущего параграфа.

Для радиуса инерции полого цилиндра имеем:

$$k_z^2 = \frac{1}{2} (a^2 + a_0^2).$$

Для определения момента инерции относительно других осей приходится применять тот же способ, как и в предыдущем параграфе, только пределы интеграции будут для полого цилиндра несколько иные, а именно: вместо нижнего предела  $r=0$  нам теперь нужно взять:  $r=a_0$ . Тогда имеем:

$$I_{yz} = I_{zx} = \pi (2c) \int_{a_0}^a r^3 \cdot dr = \frac{\pi}{4} (a^4 - a_0^4) (2c),$$

или, вводя массу полого цилиндра, имеем:

$$I_{yz} = I_{zx} = M \frac{a^2 + a_0^2}{4}.$$

Выражение для  $I_{xy}$  остается то же:

$$I_{xy} = M \frac{c^2}{3}.$$

Складывая попарно, получаем опять:

$$I_x = I_y = M \left( \frac{a^2 + a_0^2}{4} + \frac{c^2}{3} \right); \quad I_z = M \frac{a^2 + a_0^2}{2}.$$

Для *короткого полого цилиндра* (для *обруча*) можем принять ( $c=0$ ):

$$I_x = I_y = M \frac{a^2 + a_0^2}{4}; \quad I_z = M \frac{a^2 + a_0^2}{2}.$$

Наконец, для *тонкого обруча* можем положить  $a^2 = a_0^2$  и написать:

$$I_x = I_y = M \frac{a^2}{2}; \quad I_z = Ma^2.$$

148. *Эллипсоид*. Дан однородный эллипсоид с полуосями  $a, b, c$ ; требуется рассчитать его моменты инерции (рис. 136).

Как известно, масса однородного эллипсоида (при плотности  $\rho=1$ ) рассчитывается по формуле:

$$M = \frac{4}{3} \pi \cdot abc.$$

Центр тяжести однородного эллипсоида лежит, очевидно, в его геометрическом центре. Для вычисления моментов инерции проведем оси координат из центра по направлению главных осей эллипсоида. Тогда уравнение эллипсоида напишется так:

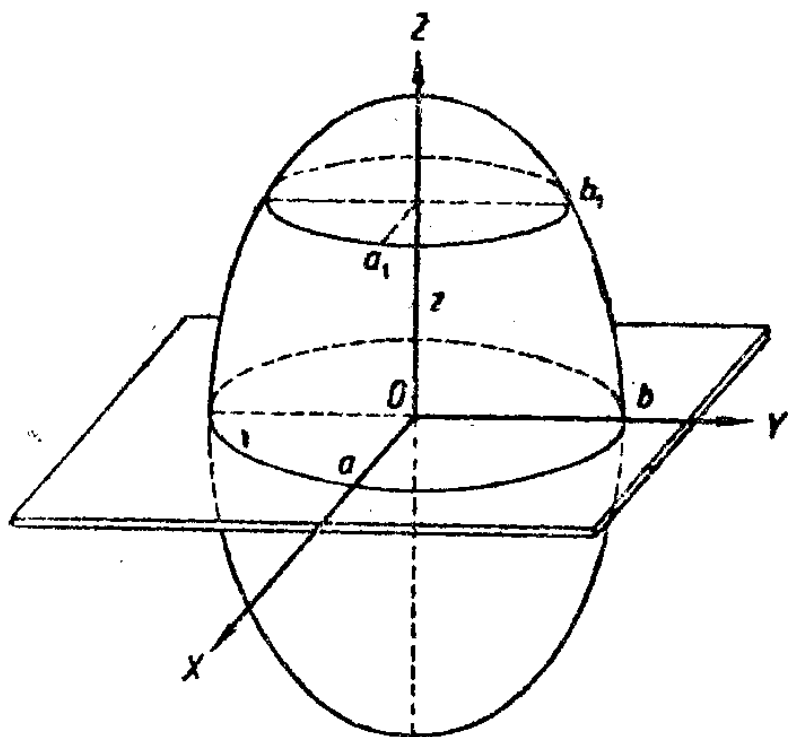


Рис. 136. Эллипсоид.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Для вычисления момента инерции эллипсоида относительно плоскости  $OXY$  (рис. 136) расслоим мысленно весь эллипсоид на тонкие слои параллельно плоскости  $XY$ . Уравнение сечения эллипсоида на каком-либо расстоянии  $z$  от плоскости  $XY$  будет следующее:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{z^2}{c^2},$$

где  $z$  для полученного сечения есть постоянная величина. Мы получили, таким образом, уравнение эллипса. Для определения главных осей этого эллипса  $a_1$  и  $b_1$  (рис. 136) нужно в этом уравнении положить  $y=0$ , и затем  $x=0$ . Получаем:

$$\left(\frac{a_1}{a}\right)^2 = 1 - \frac{z^2}{c^2}; \quad \left(\frac{b_1}{b}\right)^2 = 1 - \frac{z^2}{c^2}.$$

Так как площадь эллипса равна:

$$S = \pi \cdot a_1 b_1 = \pi \cdot ab \left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right),$$

то объем рассматриваемого слоя толщиной  $dz$  будет равен:

$$dO = \pi \cdot ab \left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right) \cdot dz,$$

а момент инерции этого слоя относительно плоскости  $XY$  будет:

$$dI_{xy} = \pi \cdot ab \left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right) z^2 \cdot dz.$$

Момент инерции всего эллипсоида относительно плоскости  $XY$  определится интегрированием этого выражения между пределами  $z = -c$  и  $z = +c$ :

$$I_{xy} = \pi \cdot ab \int_{-c}^{+c} \left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right) z^2 \cdot dz = 2\pi \cdot ab \left[ \frac{c^3}{3} - \frac{c^5}{5c^2} \right] = \frac{4\pi abc}{3} \cdot \frac{c^2}{5} = M \frac{c^2}{5}.$$

Моменты инерции относительно плоскостей  $YZ$  и  $ZX$  мы получим простой перестановкой букв  $a, b, c$  (круговая перестановка). На основании этого мы можем написать для моментов инерции однородного эллипсоида вокруг его *главных осей* следующие выражения:

$$\begin{aligned} I_x &= M \frac{b^2 + c^2}{5}; & k_x^2 &= \frac{b^2 + c^2}{5}; \\ I_y &= M \frac{c^2 + a^2}{5}; & k_y^2 &= \frac{c^2 + a^2}{5}; \\ I_z &= M \frac{a^2 + b^2}{5}; & k_z^2 &= \frac{a^2 + b^2}{5}. \end{aligned}$$

Нетрудно доказать, что это будут *главные* моменты инерции эллипсоида.

Для однородного шара  $a = b = c$  мы имеем:

$$I = M \frac{2}{5} a^2; \quad k^2 = \frac{2}{5} a^2.$$

149. Тело вращения. Так как в технике очень часто тела вращаются вокруг своей оси симметрии, то полезно разобрать и этот случай. Расслоим мысленно такое тело на тонкие диски перпендикулярно к оси симметрии  $OZ$ . Момент инерции каждого такого диска толщиной  $dz$  вокруг оси симметрии нами уже определен выше (стр. 214, 147):

$$dI_z = \frac{\pi}{2} r^4 \cdot dz.$$

Поэтому момент инерции всего тела определится интегралом:

$$I_z = \frac{\pi}{2} \int_{-c}^{+c} r^4 \cdot dz.$$

Конечно, при этом необходимо знать форму тела вращения, т. е. должен быть дан радиус тела  $r$  как функция  $z$ .

Применим эту формулу к примерам, уже рассчитанным нами выше. Если тело вращения представляет собой цилиндр высотой  $2c$ , то  $r = a$  и от  $z$  не зависит, и мы получаем прежнюю формулу:

$$I_z = \frac{\pi a^4}{2} (2c) = M \frac{a^2}{2}.$$

Применим нашу формулу к эллипсоиду вращения с осью симметрии  $OZ$ . Тогда из уравнения меридионального сечения:

$$\frac{r^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1; \quad r^2 = a^2 \left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right).$$

мы можем определить  $r$  и подставить в подынтегральное выражение. Получаем:

$$I_z = \frac{\pi a^4}{2} \int_{-c}^{+c} \left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right)^2 dz.$$

Интегрируя это выражение в пределах от  $z = -c$  до  $z = +c$ :

$$I_z = \frac{\pi a^4}{2} \left[ z - 2 \frac{z^3}{3c^2} + \frac{z^5}{5c^4} \right]_{-c}^{+c},$$

получаем после подстановки пределов:

$$I_z = \pi a^4 \left[ c - \frac{2}{3} c + \frac{1}{5} c \right] = \pi a^4 \frac{8}{15} c = M \frac{2}{5} a^2,$$

в согласии с тем, что мы имели в предыдущем параграфе (здесь у нас  $a = b$ ). Для шара остается только положить  $c = a$ .

150. Эллипсоиды инерции. Вычислив *главные* моменты инерции тела вокруг его центра тяжести, мы получаем понятие и о его *эллипсоиде инерции*, и можем пользоваться им для различных задач по движению твердого тела. Мы считаем излишним останавливаться на этом, а желали бы обратить внимание читателя только на следующее обстоятельство. Если все три главные момента инерции тела одинаковы, то его эллипсоид инерции представляет собой шар, и моменты инерции тела вокруг всех осей, проходящих через ту же точку тела будут *одинаковы*. Такой случай мы имеем в *однородном шаре*, а также и в *однородном кубе*. Предлагаем читателю определить *высоту* цилиндра, эллипсоид инерции которого есть шар, если радиус цилиндра дан. Можно найти такую точку (вне центра тяжести) в данном цилиндре, чтобы моменты инерции вокруг этой точки образовали шар и т. д.

#### ЛИТЕРАТУРА

К тому списку книг, который приведен мною в конце части II по общей механике, я прибавлю здесь только небольшое число книг, специально трактующих движение твердого тела вокруг неподвижной точки.

F. Klein & A. Sommerfeld. Über die Theorie des Kreisels I, II, III, IV, 1914.

A. Gray A Treatise on Hydrostatics and Rotational Motion, 1926.

#### АЛФАВИТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

(Показаны номера страниц)

- Атвудова машина 74.  
 Балка 53—59.  
 Велосипед 162.  
 Весы рычажные 50.  
 Волчок вытянутый 102.  
 • -горизонт 172.  
 • -компас 167—172.  
 • -маятник 135—139.  
 • свободный 97—102.  
 • сплюснутый 104.  
 • стоячий и висящий 111.  
 Волчки и опыты с ними 151, 154.  
 Движение винтовое 11.  
 • Земли 16, 165, 174.  
 Деклинаторий Фуко 167.  
 Закругления и выбоины 157.  
 Земли движение 16.  
 • прецессия 174.  
 Импульс 21.  
 Импульса момент 21.  
 Инклинаторий Фуко 167.  
 Катера маятник 78.  
 Катящийся обруч 159.  
 Качение со скольжением 186.  
 • процесс 180.  
 • шара по плоскости 191.  
 • чистое 181.  
 Колебания (см. нутации).  
 Колебания связанные 130—134.  
 Линия давления в своде 70.  
 Маятник баллистический 206.  
 • волчок 135—139.  
 • крутильный 79.  
 • обратный 78.  
 • физический 76.  
 Мгновенная ось 11.  
 • удара 202.  
 Момент инерции 18, 211.  
 • кругового цилиндра 213.  
 • параллелепипеда 212.  
 • поллого цилиндра 214.  
 • тела вращения 217.  
 • эллипсоида 215.  
 Момент реактивный 125.  
 • реакции оси 81.  
 • сил в центральном поле 45.  
 Нити равновесие 65—73.  
 Нутация 110, 114, 174.  
 Обруч катящийся 159.  
 Ось мгновенная 11, 15.  
 • упругая 83—87.  
 Поле тяготения 35.  
 • центральное 36.  
 • эллипсоида 37, 39.  
 Полодия и герполодия 96.  
 Прецессия и нутация 110.  
 • Земли 174.  
 • вынужденная 125.  
 • псевдoreгулярная 123.  
 • регулярная 109, 112.  
 • снаряда 164.  
 Предварение равноденствий 174.  
 Пуансо теорема 95.  
 Радиус инерции 20.  
 Реактивный момент 125, 157, 158.  
 Реакция опор 53—59.  
 • оси 80.  
 Сил многоугольник 30.  
 • пары 31.  
 • преобразование 29, 32.  
 Силы параллельные 34.  
 Тензор моментов инерции 19.  
 Удара коэффициент 197.  
 • процесс 195.  
 Удар внецентренный 201.  
 • кием по бильярдному шару 207, 209.  
 Удар шара о плоскость 196, 198.  
 • шаров 198.  
 Устойчивость 60, 61.  
 Ферма (определение реакций) 58.  
 Фуко жirosкоп 165.  
 • правило 125.  
 Центр качания 77.  
 • тяжести 17.  
 Центральное поле 36.  
 Цепная линия 67.  
 Циклоидальное движение 13, 15, 119.  
 Циклоиды различного типа 119.  
 Эллипсоид Пуансо 95.  
 • энергии и импульсов 92.  
 Эйлера координаты 106.  
 • уравнения 89.